

TENTAMEN 5B1142 20/12 2005
 SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

① $f(x) = x^2 e^{-2x}$ är deriverbar överallt, och definierad på hela \mathbb{R} .

\Rightarrow Lokala extremvärden endast i x s.a. $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2x(1-x)e^{-2x}$$

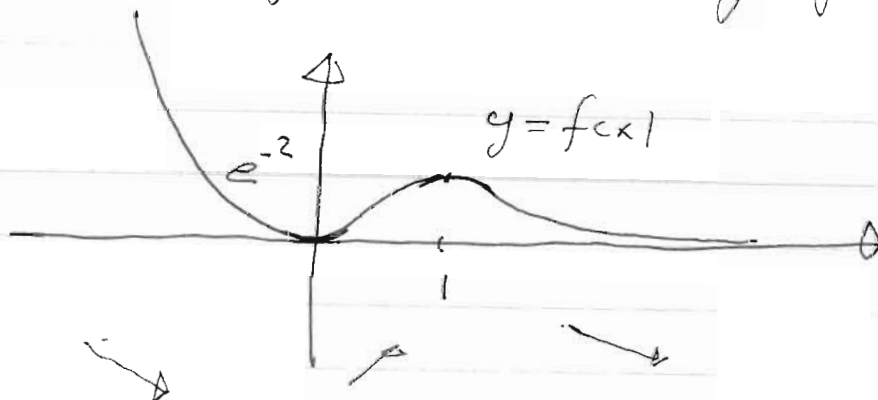
Så $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 1$.

x	$\xrightarrow{\quad 0 \quad \quad 1 \quad}$	
$2x$	- - - 0 + + + + +	} \Rightarrow
$(1-x)$	+ + + + + 0 - - -	
e^{-2x}	+ + + + + + + + +	
$f'(x)$	- - - 0 + + 0 - - -	
$f(x)$	$\searrow f(0)=0 \quad \nearrow f(1)=\frac{1}{e^2}$	
		$x=0$ lokalt min med $f(0) = 0$ $x=1$ lokalt max med $f(1) = e^{-2}$

Vi har $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sted.} \\ \text{gr. vä.} \end{array} \right\} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{2t} = +\infty$

Tillsammans ger detta en graf



Så $f(0) = 0$ är minsta värde, största värde saknas

SVAR: $(0, 0)$ är lokalt min och $f(0) = 0$ minsta värde
 $(1, e^{-2})$ är lokalt max. Största värde saknas

(2)

Alt (I):

$$\text{Nämnaren} = x^2 + x - 2 \stackrel{\text{SÄTT}}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$= -2 \text{ eller } +1$$

$$\text{Så } x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

Partialbräksuppdelning:

$$\frac{4x+2}{(x+2)(x-1)} \stackrel{\text{ANSATS}}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (2B-A)}{(x+2)(x-1)}$$

Id. av koef.:

$$\begin{cases} (x) & A+B=4 \\ (\text{konst.}) & 2B-A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \end{cases}$$

$$\int_2^3 \frac{4x+2}{x^2+x-2} dx = \int_2^3 \left(\frac{2}{x+2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \left[2 \ln|x+2| + 2 \ln|x-1| \right]_2^3$$

$$= 2 \left[\ln|x^2+x-2| \right]_2^3 = 2 \left[\ln 10 - \ln 4 \right]$$

$$= 2 \ln \frac{10}{4} = 2 \ln \frac{5}{2}$$

Alt II: Vi observerar att $\frac{d}{dx}(x^2+x-2) = 2x+1 = \frac{1}{2}(4x+2)$.

$$\int_2^3 \frac{4x+2}{x^2+x-2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2+x-2 \\ du = (2x+1) dx \\ u(3) = 10 \quad u(2) = 4 \end{array} \right\} = 2 \int_4^{10} \frac{du}{u}$$

$$= 2 \left[\ln|u| \right]_4^{10} = 2 \ln \frac{5}{2}$$

SVAR: $2 \ln \frac{5}{2}$

③ Vi har följande Maclaurin utv.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + B_1(x) x^3$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + B_2(x) x^4$$

B_1 och B_2
begränsade när
 $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(x - \frac{x^2}{2} + B_1(x) x^3 \right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + B_2(x) x^4 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + B_3(x) x^3}{\frac{x^2}{2} + B_4(x) x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + B_3(x) x}{1/2 + B_4(x) x^2} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Alternativ lösning:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \left\{ \text{typ } \frac{0}{0}, \text{ l'Hospitals regel} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}{\sin x} = \left\{ \text{typ } \frac{0}{0}, \text{ l'Hospital's egen} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} + \frac{1 \cdot (1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$$

SVAR: 2

④ Planens skärning ges av lösningarna till

$$\begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 6x - y + 3z = b \end{cases}$$

Skärningen en linje \Leftrightarrow lösning med 1 parameter.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 6 & -1 & 3 & | & b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+6 & 0 & 4 & | & 4 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 8 & 0 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} = 0$$

eku.
 \Leftrightarrow
 längs
 kolonn 2

$$\begin{pmatrix} a+6 & 4 & | & 4 \\ 8 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(a+6) = 4 \cdot 8 \Leftrightarrow a = 2$$

Så ~~det~~ för $a=2$ har systemet antingen
 ∞ många lösningar eller inga lösningar alls.

Gauss elimination ger (med $a=2$)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 6 & -1 & 3 & | & b \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{①} \\ \text{③} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 8 & 0 & 4 & | & b \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{②} \text{ ④} \\ \text{⑤} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & b \end{pmatrix} \quad b \neq 0 \Rightarrow \text{saknar lösningar}$$

$$b=0 \sim \begin{cases} 2x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{eku. för linje}$$

SVAR: $a=2$ och $b=0$

$$5) \quad v(t) = \frac{20e^{0.1t} - 20}{4e^{0.1t} + 25}$$

$$a) \quad v'(t) = \frac{20 \cdot 0.1 \cdot e^{0.1t} (4e^{0.1t} + 25) - 4 \cdot 0.1e^{0.1t} (20e^{0.1t} - 20)}{(4e^{0.1t} + 25)^2}$$

$$= \frac{e^{0.1t}}{(4e^{0.1t} + 25)^2} (8e^{0.1t} + 50 - 8e^{0.1t} + 8) > 0$$

alla $t \Rightarrow v(t)$ strikt växande

$$b) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{0.1t} (20 - 20e^{-0.1t})}{e^{0.1t} (4 + 25e^{-0.1t})}$$

$$= \frac{20}{4} = 5$$

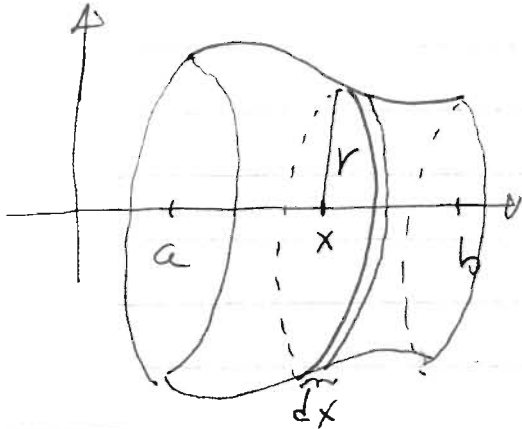
Så hastigheten växer monoton från $v(0) = 0$ mot gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 5$

$$\Rightarrow v(t) \leq 5 \text{ [m/s]} \text{ alla } t$$

(men även för relativt små t , säg $t = 100$ s, är $v(t)$ "nära" 5, $v(100) = \frac{20 \cdot e^{10} - 20}{4 \cdot e^{10} + 25} \approx 5$)

SVAR: De måste täla en nedslagskänslighet om minst 5 m/s

6 a)



Trärsnitt vid $x =$ cirkelskiva med $r = f(x)$
med area $A(x) = \pi r^2 = \pi [f(x)]^2$

En tunn skiva med tjocklek dx vid x har de
Volym $dV = A(x) dx = \pi [f(x)]^2 dx$

$$\Rightarrow V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad \text{V.S.B.}$$

$$b) \quad V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1} dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx - \pi \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= \pi \left[\arctan x \right]_0^1 - \pi \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1$$

$$= \pi (\arctan 1 - \arctan 0) - \frac{\pi}{2} (\ln(2) - \ln 1)$$

$$= \pi \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \ln 2 = \frac{\pi^2 - 2\pi \ln 2}{4}$$

7

$$f(x) = (x+1)e^{-2x} \geq 0 \text{ för } x \geq 1$$

$$\text{och } f'(x) = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x-2) < 0$$

för $x \geq 1$ så f är avtagande och positiv.

Alltså $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)e^{-2n}$ konv. ~~Cauchys~~ $\int_1^{\infty} (x+1)e^{-2x} dx$ konv.
 Integral
 kriterium.

$$\int_1^{\infty} (x+1)e^{-2x} dx = \left[\begin{array}{l} g(x) = x+1 \quad F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ g'(x) = 1 \quad f(x) = e^{-2x} \end{array} \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} \right]_1^{\infty} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-2x} dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(e^{-2} - \frac{1}{2}(A+1)e^{-2A} \right) + \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-2}}{4} - \frac{e^{-2A}}{4} \right]$$

$$= \frac{5e^{-2}}{4}$$

Alltså $\int_1^{\infty} (x+1)e^{-2x} dx$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)e^{-2n}$ konvergent.

Alternativt kan man visa att

$$(n+1)e^{-2n} \leq e^{-n} \text{ för } n \geq 1$$

och $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ är konvergent geometrisk serie

$$\Rightarrow \left. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)e^{-2n} \text{ konvergent} \right\}$$

SVAR: Serien är konvergent

8) Vi löser först den homogena ekvationen
 $y'' - 4y' + 13y = 0$

KAR. EKV: $r^2 - 4r + 13 = 0 \Rightarrow r = 2 \pm \sqrt{4 - 13}$
 $= 2 \pm 3i$

$$\Rightarrow y_h(x) = e^{2x} (a \cos 3x + b \sin 3x)$$

Vi bestämmer sedan en partikulär lösning genom ansatsen

$$y_p(x) = Ax + B \Rightarrow y_p' = A \Rightarrow y_p'' = 0$$

som insatt i ekvationen ger

$$0 - 4A + 13(Ax + B) = 13x + 9$$

$$\Rightarrow 13Ax + (13B - 4A) = 13x + 9$$

$$\begin{cases} 13A = 1 & \Rightarrow A = 1 \\ 13B - 4A = 9 & \Rightarrow B = 1 \end{cases}$$

så $y_p(x) = x + 1$.

Allmän lösning $y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) =$
 $= e^{2x} (a \cos 3x + b \sin 3x) + x + 1$

$$y(0) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

så $y(x) = e^{2x} (-\cos 3x + b \sin 3x) + x + 1$

$$\Rightarrow y'(x) = 2e^{2x} (-\cos 3x + b \sin 3x) + e^{2x} (3 \sin 3x + b \cos 3x) + 1$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 2(-1) + 3b + 1 = 0 \Rightarrow b = 1/3$$

SVAR: $y(x) = e^{2x} \left(\frac{1}{3} \sin 3x - \cos 3x \right) + x + 1$

9

Volymen ges av

$$V = V(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ \sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\sin t \cos t \end{vmatrix} = \left| \frac{\sin 2t}{2} \right|$$

$$= \begin{cases} \sin 2t \geq 0 \\ \text{om } 0 \leq t \leq \pi/2 \end{cases} = \frac{1}{2} \sin 2t. \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Största värde antas i kritiska punkter ($V'=0$) eller i def.-intervallens ändpunkter.

$$V'(t) = \cos 2t, \quad V'=0 \Leftrightarrow \cos 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Endast } t = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(0) = \frac{1}{2} \sin 0 = 0$$

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \sin \pi = 0$$

Ans.

SVAR: $t = \frac{\pi}{4}$ ger maximal volym
och $V_{\max} = V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ v.e.