

KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2005 för Öppen Ingång

Modelltentamen

Tentamen består av två delar.

Den första delen utgörs av fyra uppgifter som svarar mot kursens fyra moduler. Du ska bara räkna de uppgifter som motsvarar de moduler som du inte har klarat under kursens gång. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng, och för att bli godkänd på en modul krävs minst tre poäng på motsvarande uppgift.

Den andra delen består av fem uppgifter som vardera ger maximalt 4 poäng.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- För betyg E och 3: Godkänt på modul 1-4 samt minst 5 poäng på del 2
- För betyg D och 3: Godkänt på modul 1-4 samt minst 7 poäng på del 2
- För betyg C och 4: Godkänt på modul 1-4 samt minst 10 poäng på del 2
- För betyg B och 4: Godkänt på modul 1-4 samt minst 12 poäng på del 2
- För betyg A och 5: Godkänt på modul 1-4 samt minst 15 poäng på del 2

Lycka till!

Del 1

(1) Skissera grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ och ange alla relevanta gränsvärden och asymptoter.

(2) Är det sant att

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \leq \sqrt{2} \quad ?$$

(3) Avgör om $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ är konvergent eller divergent.

(4) Bestäm en funktion $y = y(x)$ som uppfyller

$$\begin{cases} y' = x^2 - x^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Del 2

- (5) Om funktionen $f(x)$ vet man att $\lim_{x \rightarrow 0^+} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 1$ och att $y = x + 3$ är en asymptot till kurvan $y = f(x)$ när $x \rightarrow \infty$. Dessutom vet man att f är deriverbar för alla $x \neq 0$ och att $f'(x)$ är en positiv funktion.
- Skissera ett exempel på en graf $y = f(x)$ som uppfyller dessa villkor.
 - Kan f vara inverterbar?
- (6) Bestäm tangentlinjen till $y = \arctan(2x + \sqrt{3})$ i den punkt där kurvan skär y -axeln.
- (7) Beräkna längden av kurvan $y = \ln \cos x$, $\pi/6 \leq x \leq \pi/4$.
- (8) Planet S går igenom punkterna $P(1, 2, 2)$, $Q(4, 2, -1)$ och $R(3, 0, 0)$. Genom P går också linjen L som bestäms av att den även passerar genom punkten $O(0, 1, 2)$. Bestäm vinklen mellan planet S och linjen L .
- (9) Härled tredje ordningens MacLaurin-polynom till funktionen

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$