Lösningar till övningsprov 1

1

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{100}+e^{2x}}{\ln x^2+e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{100\ln x}+e^{2x}}{\ln x^2+e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{100\ln x}}{e^{3x}}+\frac{1}{e^x}}{\frac{\ln x^2}{e^{3x}}+1} \to 0$$

Gränsvärdet blir noll eftersom e^{3x} ökar snabbare än både $e^{100\ln x}$ och $\ln x^2$ då $x\to\infty$. Alternativt kunde detta också ha insetts direkt genom att utnyttja standardgränsvärdet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{a^x} \to 0\ , \qquad (a>1)$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x^3-x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x^2-1}\right) \to (1)(\frac{2}{-1}) = -2$$

2

För att få reda om man lyckas uppnå den önskade mängden kan man ta gränsvärdet av funktion med det givna startvärdet på m_0 då $t\to\infty$. Vi får då reda på om bakteriemängden någonsin kommer uppnå det givna värdet. Med $m_0 = 0.01g$ får vi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{0,27*0,01}{0,01+(0,27-0,01)e^{-0,3t}} \to 0,27$$

Eftersom vårt gränsvärde är större än det önskade värdet kan vi sluta oss till att man kommer att lyckas. Notera dock att vi fortfarande inte har någon utsago om huruvida tiden är rimlig.

3

För en att $f(x)$ ska ha en sned asymptot, $y = kx+1$, då $x\to\infty$ så gäller(s.160)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \to k \qquad (i)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x)-kx\Big) \to m \qquad (ii)$$

Vidare skulle våran funktion ha en negativ lodrät asymptot vid $x = 2$ samt ha formen $\frac{p(x)}{q(x)}$. Asymptot villkoret vid $x = 2$ ger oss incitamentet att skriva

$$R(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + g(x)$$

Vi har nu asymptotvillkoret uppfyllt(så länge $g(x)$ beter sig snällt kring $x = 2$).

Vi fortsätter med villkor (i) och (ii). I vårt fall är $m = 1$, samt $k = 1$. Vi ser att vi kan sätta $g(x) = x + 1$ eftersom vår första term går mot noll då $x \to +\infty$. Alltså

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{(x-2)^2} + x + 1}{x} \to 1 \qquad (i)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} + x + 1 - x \right) \to 1 \qquad (ii)$$

Vi kan således skriva lösningen som

$$R(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + x + 1 = -\frac{(x+1)(x-2)^2 + 1}{(x-2)^2}$$