

Lösningar till övningsprov 2

1

Definitionen av tangenten till funktionskurvan, $f(x)$, i punkten $(x_0, f(x_0))$ ges av linjen vars ekvation är:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Vi har

$$y = \tan 2x \Rightarrow y' = \frac{2}{\cos^2(2x)}$$

och får för $x_0 = \frac{\pi}{6}$,

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 8$$

Tangentens ekvation blir således

$$y = 8\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$$

2

Vi låter stegtoppens höjd över golvet beskrivas av $h(t)$ där t är tiden. Vidare låter vi vinkeln mellan stegen och golvet beskrivas av funktionen $\theta(t)$. Vi skriver upp uttrycket för sinus i den triangel som stegen, väggen och golvet spänner upp

$$\sin \theta(t) = \frac{h(t)}{2} \Rightarrow \theta(t) = \arcsin \frac{h(t)}{2}$$

Derivering m a p t ger

$$\theta'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h(t)}{2}\right)^2}} \frac{h'(t)}{2}$$

Vi stoppar in värden för $h(t)$ och $h'(t)$ (detta är ju bara nedglidningshastigheten för stegen) vid den sökta tidpunkten $t = 0,1$ s

$$\theta'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,5}{2}\right)^2}} \frac{0,1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,5}{2}\right)^2}} \frac{0,1}{2} = \frac{0,05}{\sqrt{0,9375}} \approx 0,052$$

3

Lokala extrempunkter finns antingen i kritiska eller singulära punkter eller i eventuella ändpunkter. Av funktionens utseende kan vi direkt sluta oss till att inga singulära punkter existerar. Vidare är intervallet \Re således kan vi även utesluta ändpunkterna. Kvar är de kritiska punkterna d v s punkter där $f'(x) = 0$. Vi deriverar och får

$$y = x^2 e^{2x} \Rightarrow y' = 2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x} = (2x + 2x^2) e^{2x}$$

Villkoret $y' = 0$ ger

$$y' = (2x + 2x^2) e^{2x} = 0 \Rightarrow 2x + 2x^2 = 0$$

Vi får punkterna $x_1 = 0$ och $x_2 = -1$. För att kunna avgöra huruvida punkterna är minimi- eller maximipunkter (sats 2 s.221) behöver vi beräkna andraderivatans

$$y' = (2x + 2x^2) e^{2x} \Rightarrow y'' = (2 + 4x) e^{2x} + (4x + 4x^2) e^{2x} = (4x^2 + 8x + 2) e^{2x}$$

Vi sätter in punkterna och får

$$y''(0) = 2 \Rightarrow y \text{ har ett sträng lokalt min i } x = 0$$

$$y''(-1) = -2e^{-2} \Rightarrow y \text{ har ett sträng lokalt max i } x = -1$$