Lösningar till övningsprov 4

1

Definition på en primtiv funktion av $f(x)$ är: en funktion $F(x)$ på intervallet I så att

$$F'(x) = f(x) \text{ för alla } x \in I$$

Vi tar således integralen av $f(x)\,dx$

$$\int f(x)\,dx = \int x\sqrt{x+1}\,dx = \int x(x+1)^{1/2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int (t-1)t^{\,1/2}dt = \int t^{\,3/2} - t^{\,1/2}dt = \frac{2}{5}t^{\,5/2} - \frac{2}{3}t^{\,3/2} + C = \frac{t^{\,3/2}}{15}(6t-10)+C$$

$$= \frac{(x+1)^{3/2}}{15}(6x-4)+C$$

Således

$$F(x) = \frac{(x+1)^{3/2}}{15}(6x-4)+C, \text{ där } C \text{ är en konstant}$$

2

Vi gör som ovan d v s tar integralen av $r(x)\,dx$

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{x^4+x^2+2}{x^3+x}\,dx = \int x + \frac{2}{x^3+x}\,dx$$

Vi vill nu göra en partialbråksuppdelning av den andra termen eftersom den är en aningens svårintegrerad i sin nuvarande form. Vi skriver:

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad 2 = Ax^2 + Bx + C(x^2+1)$$

Vi summerar nu de termer med lika gradtal vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} A + C = 0 & \Rightarrow A = -C = -2 \\ B = 0 \\ C = 2 \end{cases}$$

Vi har nu våra koefficienter och kan skriva integralen som

$$\int r(x)\,dx = \int x + \frac{2}{x^3+x}\,dx = \int x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x^2+1| + 2\ln|x| + C = \frac{x^2}{2} + \ln\frac{|x|^2}{x^2+1} + C$$

Således

$$R(x) = \frac{x^2}{2} + \ln \frac{x^2}{x^2+1} + C$$

Notera att vi släppt absolutbeloppets termen för ln då $\frac{x^2}{x^2+1}$ är positiv för alla x.

3

Vi låter $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$. Vi noterar att funktionen aldrig kommer ha ett värde större än 1 då sin aldrig är större än 1 på intervallet. Vidare kommer funktion heller aldrig vara negativ på intervallet eftersom både täljare och nämare är positiva på intervallet. Vi använder oss av detta och får med hjälp av sats 5 s. 292 olikheten

$$\int_0^1 0 \, dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx < \int_0^1 1 \, dx$$

Vi utvärderar vänster- och högerintegralerna och får

$$0 < \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx < 1$$

VSB