

SVAR 2 Lösningsförslag  
SB1142 2/6 2006

1. SKISSERA GRAFEN TILL  $y = \frac{e^x}{1+x^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,

OCH ANGE SAMTLIGA KRITISKA PUNKTER OCH ASYMPTOTER,  
SAMT VAR FUNKTIONEN ÄR VÄXANDE RESP. AVTAGANDE.

Vi konstaterar först att

- $y(x) > 0 \quad \forall x$

- $y(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty$

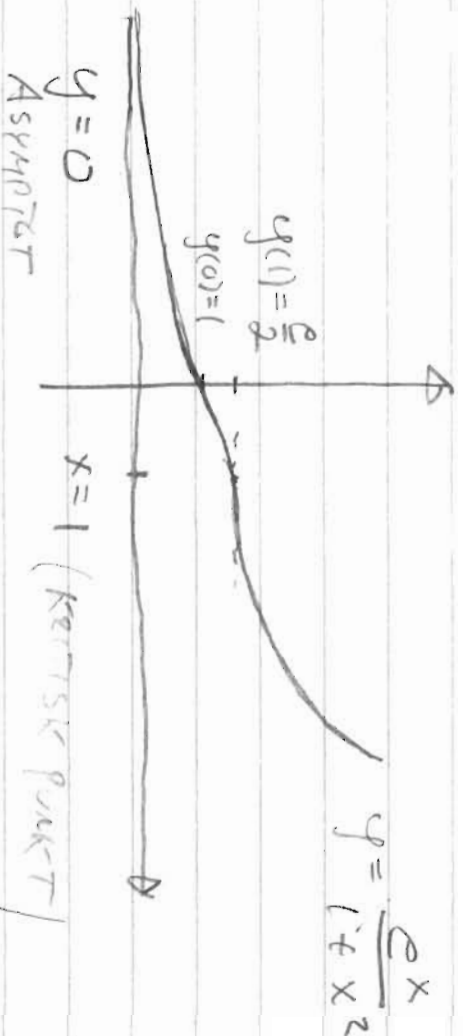
(Eg  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(1+x^2)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ )

Derivatan ges av

$$y' = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x}{(1+x^2)^2} (1+x^2-2x) = \frac{e^x}{(1+x^2)^2} (1-x)^2$$

Det följer att

- $y' = 0$  om  $x = 1$
  - $y' > 0$   $x \neq 1$
- $\Rightarrow$   $x=1$  enda kritisk punkt  
•  $y(x)$  växande alla  $x$ .



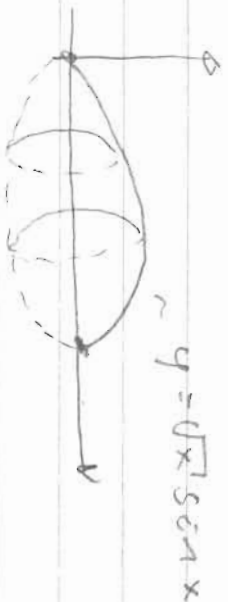
$y=0$   
ASYMPTOT

DÅ  $x \rightarrow -\infty$

$y = y(x)$  VÄXANDE ALLA  $x \in \mathbb{R}$ .

- 2) BESTÄM VOLUMEN AU DEN KÖRPER SON BILDAS NÄR  
 OMRÅDET  $0 \leq y \leq \sqrt{x} \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , FÄR  
 POTENA ETT VARU KRINGS X-AXELN.

$\sin x > 0$  för  $0 < x < \pi$  och  $\sin \theta = \sin \pi = 0$ .



$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{x} \sin x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$$

$$= \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \\ \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{cases} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( \int_0^{\pi} x dx - \int_0^{\pi} x \cos 2x dx \right)$$

$\underbrace{\int_0^{\pi} x dx}_{I_1} \quad - \quad \underbrace{\int_0^{\pi} x \cos 2x dx}_{I_2}$

$$I_1 = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$I_2 = \begin{cases} u = x & v = \frac{1}{2} \sin 2x \\ du = dx & dv = \cos 2x dx \end{cases} = \left[ \frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = \frac{1}{4} \left[ \cos 2x \right]_0^{\pi} = 0$$

Alltså är  $V = \frac{\pi}{2} (I_1 - I_2) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^3}{4}$

Summa:  $\frac{\pi^3}{4}$  v.e.

3.

Se Lösningen Poisson & Biien

Kapitel 7.9

4. BESTÄM EKVATIONEN FÖR DET PLAN SOM  
GÅR GENOM PUNKTEN  $P(1, 1, 0)$ , OCH SOM  
ÄR ORTOGONALT MOT LINJEN GENOM  $Q(3, 4, 0)$   
OCH  $R(0, 3, -2)$

Linjen genom  $Q$  och  $R$  har riktningsvektor

$$\vec{V} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = (0, 3, -2) - (3, 4, 0) = (-3, -1, -2)$$

Planet  $\perp$  linjen  $\Rightarrow -\vec{V} = \vec{n} =$  normal till planet  
 $\vec{n} = (3, 1, 2)$

En punkts formeln ger planets ekvation

$$3(x-1) + (y-1) + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + 2z = 4$$

Svar:  $3x + y + 2z = 4$

5

$$f(x) = x + \ln(3 - x^2)$$

$$a) D_f = \{x : 3 - x^2 > 0\} = \{x : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$$

(eftersom  $\ln t$  def. om  $t > 0$ )

b)

$$f'(x) = 1 + \frac{(-2x)}{3-x^2} = (3-x^2-2x)/(3-x^2)$$

$$= -(x^2+2x-3)/(3-x^2)$$

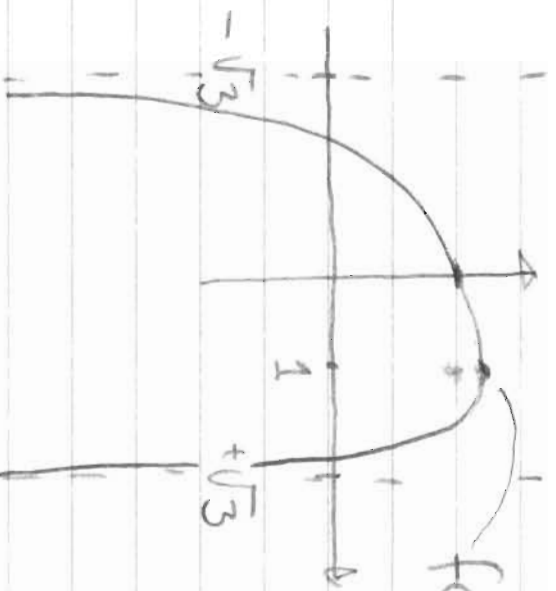
$$= -(x+3)(x-1)/(3-x^2)$$

$\Rightarrow X=1$  är enda kritisk p:nt i  $D_f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet f' > 0, \text{ dvs } f \text{ växande om } x \in (-\sqrt{3}, 1) \\ \bullet f' < 0, \text{ dvs } f \text{ avtagande om } x \in (1, \sqrt{3}) \end{array} \right.$

Dessutom gäller  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} f(x) =$

$$= -\sqrt{3} + \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} \ln(3-x^2) = -\sqrt{3} + \ln t \quad t = -\infty$$



$$f(1) = 1 + \ln 2 \quad \bullet D_f = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

$$\text{Svar: } f(1) = 1 + \ln 2$$

= största värde

• minsta värde saknas

6.

BESTÄM ETT APPROXIMATIV VÄRDE FÖR

(1.1)<sup>3/2</sup> MED HJÄLP AV 2:G ORDNINGENS

MACLAURIN-VITVECKNING AV  $f(x) = (1+x)^{3/2}$

$$f(x) = (1+x)^{3/2} \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2} \quad f'(0) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-1/2} \quad f''(0) = \frac{3}{4}$$

$$f(h) \approx f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 \quad \text{fÖR } h \approx 0$$

$$= 1 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{8}h^2$$

$$(1.1)^{3/2} = (1+0.1)^{3/2} = f(0.1) \approx 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{100}$$

$$= 1 + 0.15 + 0.375/100 = 1 + 0.15 + 0.00375$$

$$\approx 1.154$$

SVAR:  $(1.1)^{3/2} \approx 1.154$

$$\textcircled{7.} \quad I = \int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx$$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3) \quad \text{see } \circ$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+2)}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x + (3A+2B)}{(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

1. D. Koeff.  $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1-A \\ 3A+2-2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2+5x+6} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+3}$$

$$\Rightarrow I = \int \left( \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+3} \right) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -\ln|x+2| + 2\ln|x+3| \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln \frac{(x+3)^2}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln \frac{x^2+6x+9}{x+2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6x+9}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6+\frac{9}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6+\frac{9}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+6+\frac{9}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

$\rightarrow \infty$

Sum: DIVERGENT  
(NOT  $+\infty$ )

8.

Bestimm Funktionen  $y(x)$  sä Art

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + 4y^2 \\ y(\pi) = 1/2 \end{cases}$$

Skatation  $\frac{dy}{dx} = 1 + 4y^2$  " or separabel.

$$\int \frac{dy}{1+4y^2} = \int dx \Rightarrow \int \arctan 2y = x + C_1$$

Villkoret  $y(\pi) = 1/2$  ger

$$\frac{1}{2} \arctan 1 = \pi + C_1$$

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} = \pi + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{7\pi}{8}$$

Alltså

$$\frac{1}{2} \arctan 2y = x - \frac{7\pi}{8} \Rightarrow \arctan 2y = 2x - \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2y = \tan\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} \tan\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)}$$

Kontroll:  $\frac{d}{dt} \tan t = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)} \cdot 2 = \frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{7\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 4$$



9.

AVGÖR OM FÖLJANDE PÅSTÄNDE ÄR  
SANT ELLER FALSKT.

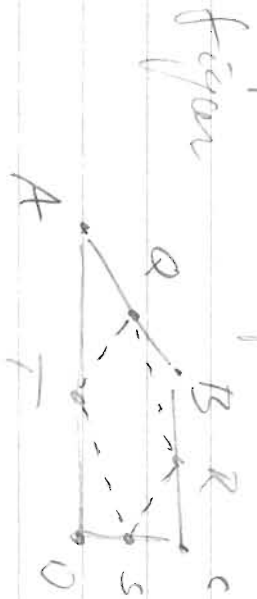
" Utgå ifrån en godtycklig fyrhörning

K. Bilda en ny fyrhörning  $\triangleleft$  genom  
att sammansluta mittpunkterna på K:s sidor

$\triangleleft$  Glin då alltid en parallelogram "

(ETT BEVIS FÖR DEN SEKSATS KRÄVS ANSÄS)

Låt hörnen betecknas A, B, C, D, och  
mittpunkterna på sidorna Q, R, S, T enligt



Låt dessa punkter  
ha ortvektorerna  
 $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{q} = \vec{OQ}$  osv.

$$\begin{aligned} \text{Då är} \quad \vec{q} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), & \vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{s} &= \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{c}), & \vec{t} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}). \end{aligned}$$

Vill skall nu visa att  $\vec{RS} = \vec{QT}$  och  $\vec{QR} = \vec{TS}$

$$\vec{RS} = \vec{s} - \vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b})$$

$$\vec{QT} = \vec{t} - \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{c}) = \vec{RS}$$

$\vec{QR} = \vec{r} - \vec{s}$  följer motsv. sätt.

~~BT~~