KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2006 för Öppen Ingång

Inlämningsuppgift LE 3

För att kunna få godkänt på denna inlämningsuppgift krävs att du lämnar väsentligen korrekta skriftliga lösningar senast under lektionstillfället tisdag 28/11 (13.15 - 15.00) och att du muntligen kan redogöra för dina lösningar vid lektionstillfället 30/11, 13.15 - 15.00. Lösningarna kan inte kompletteras vare sig vid det muntliga tillfället eller på annat sätt.

Det går bra att lämna handskrivna lösningar, men de skall vara snyggt och prydligt utförda. Lösningarna skall vara fullständiga och skrivna så att de går att läsa som en löpande text av någon med förkunskaper motsvarande dina egna. Satser ur kurslitteraturen får användas, men du ska naturligtvis tala om vilka satser du använder. Att kopiera andras arbeten, eller lösningar ur andra läroböcker etc, är absolut inte tillåtet och betraktas som fusk.

Kom ihåg att skriva namn och personnummer på alla blad du lämnar in.

---

(1) (a) Bevisa att

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

(b) Undersök, med hjälp av en räknare, partialsummorna till $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Kan du se vad serien konvergerar mot?

Kommentar. Med hjälp av s k Fourierserier, som du får läsa om i senare kurser, kan man visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493406\ldots \qquad \text{(Ständigt detta } \pi\text{ !)}$$

(2) Avgör konvergensen hos följande serier

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2 + n^4}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n - 1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

(3) (a) Bestäm MacLaurinutvecklingen till ordning n med restterm till

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(b) Vilken blir Maclaurin-serien för f, och för vilka x konvergerar denna?

(c) Härled denna serieutveckling på ytterligare ett sätt.

(d) Rita för hand i en och samma figur en skiss av grafen till $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ och graferna till första och andra ordingens MacLaurin-polynom till $f(x)$.

(e) Använd en grafritande räknare eller lämplig programvara för att också jämföra 3:e och 4:e gradens MacLaurinpoynom till f med f själv. Redovisa vad du finner genom att skriva ut, eller rita av, och kommentera.

(4) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x}{e^x - 1 - x}$$

genom att

(a) göra lämpliga Taylor-utvecklingar;

(b) använda l'Hospitals regel.

(5) I ett hus där värmesystemet plötsligt upphör att fungera är rimligt att anta att antaga att temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur. Antag att yttertemperaturen är konstant $-10°$ C. Om innertemperaturen var $20°$ C när värmesystemet upphörde att fungera och $15°$ C efter tre timmar, vad är temperaturen efter 2 dygn?

(6) Bestäm den funktion $y(x)$ som uppfyller

$$y'' + (a-b)y' + cy = x^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Talen a,b och c ges av de tre första nollskilda siffrorna i ditt personnummer.