KTH Matematik
Hans Thunberg

Tentamen 31/5 2007 kl 14-19
5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra
5B1143 Matematik 1 för CL, del B

Tentamen består av två delar.

Den första delen utgörs av fyra uppgifter som ger maximalt 4 poäng vardera. Uppgifterna på första delen svarar mot kursens fyra moduler/moment.
För 5B1142 gäller: Är du godkänd på löpande examination av modul n får du tillgodoräkna dig 4 poäng på uppgift n (och ska alltså inte göra uppgift n).
För 5B1143, del B, gäller: Är du godkänd på löpande examination av moment $n+3$ får du tillgodoräkna dig 4 poäng på uppgift n (och ska alltså inte göra uppgift n).

Den andra delen består av fyra uppgifter som ger vardera ger maximalt 5 poäng vardera.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig, väl strukturerad och motiverad lösning.

Betyget på tentamen bestäms av den sammanlagda poängsumman från del 1 och 2, samt eventuell extra bonuspoäng, dvs totalt 37 poäng. Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- För betyg E och 3: 18 – 21 poäng
- För betyg D och 3: 22 – 24 poäng
- För betyg C och 4: 25 – 27 poäng
- För betyg B och 4: 28 – 30 poäng
- För betyg A och 5: 31 – 37 poäng

Inga hjälpmedel är tillåtna. *Lycka till!*

Del 1. Uppgifter om 4 poäng

(1) Bestäm det största och det minsta värde som antas av funktionen

$$f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$$

på intervallet $[1, 5]$.

(2) Beräkna den bestämda integralen

$$\int_4^6 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx$$

och förenkla svaret så långt som möjligt.

(3) Bestäm en funktion $f(x)$ sådan att

$$f'(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}, \quad \text{för alla reella tal } x,$$

och som dessutom uppfyller att $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

(4) Linjerna $(x, y, z) = (3, 1, 3)+s(1, -2, 3)$ och $(x, y, z) = (4, 6, 1)+t(2, 3, 1)$ skär varandra. Bestäm skärningspunkten samt cosinus för mellanliggande vinkel.

Del 2. Uppgifter om 5 poäng

(5) Bestäm talen a och b så att de tre planen $ax - 3y + z = 2$, $2x + y + z = 6$ och $6x - y + 3z = b$ skär varandra längs en gemensam rät linje. Ange också skärningslinjens ekvation på parameterform.

(6) Låt $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$. Bestäm det största intervall kring origo på vilket f är inverterbar. Beräkna också $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

(7) a) Formulera Taylors Formel för en reellvärd funktion f av en reell variabel, och förklara dess innebörd. Nödvändiga förutsättningar på funktionen f ska anges.

b) Beräkna en approximation till $\ln \frac{11}{10}$ med tre korrekta decimaler.

(8) En mekanisk leksaksbil färdas en 10 meter lång sträcka. Hastigheten v [m/s] varierar med den tillryggalagda sträckan x [m] enligt formeln

$$v(x) = \sqrt{x(10-x)}.$$

a) Härled följande uttryck för den tid t [s] det tar för bilen att avverka hela sträckan:

$$t = \int_0^{10} \frac{dx}{v(x)}.$$

b) Beräkna den tid det tar för leksaksbilen att färdas denna sträcka om 10 meter. (Formeln i a) får användas utan härledning.)