Version A

Lappskrivning 6 i kurs 5B1143 Matematik 1 för CL1

onsdagen den 20 december 2006 kl 13.15-14.15

Förkortningar: DE = differentialekvation, BV = begynnelsevillkor.

1. Bestäm den allmänna lösningen $y(x)$ till DE $x\,y' + 3\,y = 15$.
(* Finns gränsvärdet av $y(x)$ då x går mot oändligheten — och stämmer det med DE? *)

Svar: $y = 5 + C/x^3$, där C är en *godtycklig* konstant. $\lim y = 5$ då $x \to \infty$.

2. Lös DE $y'' + 4y' + 5\,y = 5$ med BV $y(0) = 10$, $y'(0) = 0$.

Svar: Antag $y = y(x)$. Allmän lösning blir $y = 1 + \mathrm{e}^{-2x}(A\cos x + B\sin x)$.
Här fås sedan $A = 9$, $B = 18$.

3. Maclaurinserien för $\arctan x$ ger som biprodukt den alternerande serien $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots$ för talet $\pi/4$. Härled Maclaurinserien för $\ln(1 + x)$ med hjälp av den geometriska serien och använd den på liknande sätt för att framställa talet $\ln 2$ som en alternerande serie.
(* Kan Du förklara varför denna serie konvergerar? *)

Svar: $\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, då $|x| < 1$,
enligt den geometriska serien. Termvis integration ger
$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$, då $-1 < x \leq 1$.
Om vi här sätter $x = 1$ får vi en alternerande serie för $\ln 2$.

Version B

4. Bestäm den allmänna lösningen $y(x)$ till DE $x\,y' + 4\,y = 16$.
(* Finns gränsvärdet av $y(x)$ då x går mot oändligheten — och stämmer det med DE? *)

5. Lös DE $y'' + y = 3\,x^2 + 6$ med BV $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

6. Maclaurinserien för $\ln(1 + x)$ ger som biprodukt den alternerande serien $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots$ för talet $\ln 2$. Härled Maclaurinserien för $\arctan x$ med hjälp av dess derivata och den geometriska serien, och använd den på liknande sätt för att framställa talet $\pi/4$ som en alternerande serie.
(* Kan Du förklara varför denna serie konvergerar? *)