KTH Matematik
JA

Svar och lösningar till
Tentamen i kurs 5B1143 Matematik 1, del B, för CL
den 5 februari 2007 klo 8 – 13.

(1) Med förkortningen $D = \dfrac{d}{dx}$ kan vi skriva $D\left[\ln(x^2) + 2\ln(\mathrm{e}/x)\right] = 0$,

$D\left(-\dfrac{x^2}{2} + x^2\ln x\right) = 2x\ln x$ eller $\displaystyle\int 2x\ln x = -\frac{x^2}{2} + x^2\ln x + C$,

$D\,2\arctan(x^2) = \dfrac{4\,x}{x^4+1}$ eller $\displaystyle\int \frac{4\,x}{x^4+1} = 2\arctan(x^2) + C$,

$D\,\dfrac{x^5}{5!} = \dfrac{x^4}{4!}$, $D\,4!\left(-\dfrac{1}{x}\right)^5 = 5!\left(-\dfrac{1}{x}\right)^6$

$D\,6\sinh x = 3\,\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{-x}$, men även omvänt $D\,(3\,\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{-x}) = 6\sinh x$!
Kvar blir oparade

$$2\ln(x^4+1) \qquad x^2\ln x \qquad \frac{24}{x^5} \qquad 6\,\mathrm{e}^x + 6\,\mathrm{e}^{-x}$$

(2) Givet att $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,dx = 1/2$. Vi beräknar $\displaystyle J = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,dx =$
$\displaystyle\{\text{ jämn integrand }\} = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,dx = 1$.

Vidare blir $\displaystyle I_0 = \{\text{ sätt } x = u\sqrt{2\pi}\ \} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi u^2}\sqrt{2\pi}\,du = \sqrt{2\pi}/2 = \sqrt{\pi/2}$.

Integranden uti I_1 har primitiv funktion $-\mathrm{e}^{-x^2/2}$. I_1blir därför 1 .

Uti integral I_2 integrerar vi partiellt; vi integrerar faktorn $x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ och deriverar faktorn x . Detta ger att $I_2 = I_0$.

$$I_0 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\,, \quad I_1 = \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\,, \quad \text{samt} \quad I_2 = \int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx\,.$$

(3) a) Bestäm den allmänna lösningen till diffekvationen $y'' + 25\,y = 30\cos 5x$.
b) Bestäm *den* lösning som startar i vila: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Den karakteristiska ekvationen $r^2 + 25 = 0$ ger homogena lösningen $y_{\text{hom}} = A\cos 5x + B\sin 5x$ varav kommer ansatsen till partikulärlösning: $y = a\,x\cos 5x + b\,x\sin 5x$ som efter insättning ger $a = 0\,, b = 3$ och $y_{\text{part}} = 3\,x\sin 5x$. Allmänna lösningen blir $y = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)$.

b) Den lösning som startar i vila måste nu ha $A = 0\,, B = 0$, och sammanfaller alltså med y_{part} .

(4) Visa att ekvationen $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ beskriver en rät linje i (x, y)-planet, som går genom de båda punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2).

Ekvationen kan skrivas på formen $Ax + By + C = 0$, där $A = y_1 - y_2$ och $B = x_2 - x_1$. Om de båda givna punkterna icke sammanfaller, så måste åtminstone *någon* av dessa båda koefficienter vara nollskild; vi har då en ekvation som beskriver en rät linje i planet.

Om nu $x = x_1$ och $y = y_1$ så får determinanten tvenne identiska kolonner och blir därför noll. Det betyder ju att punkten (x_1, y_1) verkligen *ligger* på vår räta linje. Samma förhållande gäller nu även för den andra punkten.

(5) För vilka värden på parametern a skär de tre planen
$2x + ay + 7z = 2$, $ax + y + 6z = 1$, $3x - 2y + z = 1$
varandra längs en gemensam rät linje? Ange också denna linje.

Systemets determinant blir $\Delta = \det A = (5 - a)(a + 1)$. Så fort Δ är nollskild har ekvationssystemet en entydig lösning (en punkt i rummet). Då man undersöker fallet $a = 5$ finner man snart att systemet saknar lösning. Då $a = -1$ finner man en hel linje som lösningsmängd. Den kan *till exempel* skrivas på formen
$x = -3 + 13t$, $y = 4 - 19t$, $z = t$, t reell parameter.

(6) Låt $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. Bestäm de värden f' kan antaga, och ange speciellt de x-värden för vilka grafen $y = f(x)$ lutar så mycket som möjligt. Kan Du skissa grafen?

Då $0 = f''(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ lutar grafen som mest; det inträffar då $x = \pm 1$. Lutningen $f'(x)$ kan antaga alla värden mellan $\pm 1/\sqrt{\mathrm{e}}$ inklusive dessa.

(7) Rullkurvan. Vi följer en punkt P som sitter på ett hjul med radien R, då hjulet rullar ett varv på plan mark. Om t betecknar den vinkel hjulet rullat från start $(t = 0)$ till mål $(t = 2\pi)$, kan man visa att

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

där (x, y) är läget (koordinaterna) för punkten P. Hur lång sträcka tillryggalägger punkten P då hjulet rullar ett varv? Är Ditt svar rimligt (se figur)?

Svar: Längden blir $8R$.

(8) En regelbunden n-hörning (polygon) ligger med alla sina hörn på enhetscirkeln. Beräkna dess area. Vad händer med denna area då n växer obegränsat? Stämmer det?

En av de n små trianglarna får area $\dfrac{B\,h}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ och tillsammans får de area $A_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$, som då n växer går mot π.