Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2007-06-09, kl. 08.00-13.00
5B1146, linjär algebra med geometri för IT och ME (5p)

1a. Volymen ges av $V = \pm \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$ $\boxed{\textbf{Svar: } 4.}$

1b. Vi har $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (1,-3,1)$ och $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$ $\boxed{\textbf{Svar: } \text{Vektorerna ligger inte i samma plan.}}$

---

2. Vi undersöker om det finns konstanter a och b sådana att $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$.
$a(1,-1,1,1) + b(1,2,1,2) = (5,1,5,7) \Rightarrow (a + b, -a + 2b, a + b, a + 2b) = (5,1,5,7)$

$$\begin{cases} a + b = 5 & \\ -a + 2b = 1 & e_2 + e_1 \\ a + b = 5 & e_3 - e_1 \\ a + 2b = 7 & e_4 - e_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 3b = 6 \\ 0 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = 2.$$ $\boxed{\textbf{Svar}\text{: ja.}}$

---

3. Basbytematrisen är $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Om en vektor $\mathbf{x} = (x, y)$ i gamla basen **e** och samma vektor $\mathbf{x} = (u, v)$ i den nya basen **f** så ges sambandet mellan (x, y) och (u, v) via

$$(*)\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $x + 2y = 3 = \left[(*) \Rightarrow \begin{cases} x = 2u + 5v \\ y = u + 2v \end{cases} \right] = 4u + 9v = 3$

4. Matrisen $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ diagonaliserar A. Ty dess kolonner består av egenvektorer till A och $\det(P) = -1 \neq 0$ dvs egenvektorerna är linjärt oberoende .Den sökta matrisen A och matrisen P uppfyller sambandet $P^{-1}AP = D$ där $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

och vi får $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$. $\boxed{\textbf{Svar: } \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}.}$

---

5. Ekvationssystemet (i obekanta x, y och z) $\begin{cases} ax + y + 2z = 3a + b + c \\ bx + 2y + z = a + 3b + 2c \\ cx + y + z = a + b + 2c \end{cases}$ har precis en lösning

då $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + b - 3c \neq 0$. För $x = 1$, $y = 1$ och $z = 1$ fås $\begin{cases} 2a + \ \ b + \ \ c = 3 \\ \ \ a + 2b + 2c = 3 \\ \ \ a + \ \ b + \ \ c = 2 \end{cases}$ och

med hjälp av Gausselimination får vi $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 - r_3 \\ r_2 - 2r_1 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 - r_3 \\ \\ r_3 - r_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, alltså $a = 1$ och $b = 1 - c$. Detta insatt i $a + b - 3c \neq 0$ ger $c \neq \frac{1}{2}$. $\boxed{\textbf{Svar: } a = 1, b = 1 - c, c \neq \frac{1}{2}.}$

6a. Den första linjen har riktning av vektorn $\boldsymbol{u} = (3,2,3) - (2,1,5) = (1,1,-2)$. Linjens ekvation är $\boldsymbol{p}(s) = (3,2,3) + s(1,1,-2) = (3 + s, 2 + s, 3 - 2s)$.

Den andra linjen har riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (0,1,7) - (2,2,4) = (-2,-1,3)$. Linjens ekvation är $\boldsymbol{r}(t) = (0,1,7) + t(-2,-1,3) = (-2t, 1 - t, 7 + 3t)$.

I skärningspunkten är $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{r}(t)$ dvs

$$\begin{cases} 3 + \ \ s = -2t \\ 2 + \ \ s = 1 - t \\ 3 - 2s = 7 + 3t \end{cases}$$

vilket ger $s = 1$, $t = -2$. Skärningspunkten är $\boldsymbol{p}(1) = (4,3,1)$.

Svar a: (4,3,1)

6b. Planets normalvektorn är $\boldsymbol{u} \mathrm{x} \boldsymbol{v} = (1,1,1)$ och planet går genom punkten $(3,2,3)$. Planets ekvation ges av $(1,1,1)(x - 3, y - 2, z - 3) = 0$, dvs $x + y + z = 8$.

$\boxed{\textbf{Svar b: } x + y + z = 8.}$

---

7. a) $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)\mathrm{I} =$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Om $A^3 = \mathbf{0} \Rightarrow \det(A^3) = (\det(A))^3 = 0 \Rightarrow \det(A) = ad - bc = 0$. Enligt a) är $A^2 = (a + d)A$, multilpicera med A,

$\mathbf{0} = A^3 = (a + d)A^2 = (a + d)(a + d)A = (a + d)^2 A \Rightarrow a + d = 0$ och ur a fås $A^2 = \mathbf{0}.$
