KTH-Matematik

# Tentamenskrivning, 2006-12-19, kl. 08.00-13.00
# 5B1146, linjär algebra med geometri för IT och ME (5p)

**Preliminära gränser** för betygen 3, 4 och 5 är 11, 16 och 21 poäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningsförslaget skall textförkaras **Bristande läsbarhet medför poängavdrag. ( kladdpaper skall inte lämnas in )**
**Inga hjälpmedel**

## 3-poängsuppgifter

Den som blivit godkänd på KS $X$ , $1\leq X \leq 3$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X, så skall motsvarande tal X inte räknas om

1. Ett plan går genom punkten $(3,1,-1)$ och är parallell med linjerna $\boldsymbol{p}(t) = (3-t,\ 2-2t,\ 1+2t)$ och $\boldsymbol{r}(t) = (2+t,\ 3-2t,\ 1+t)$. Bestäm planets ekvation.

2. Ange alla a–värden för vilka ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+2y+az = a \\ x+y+z \quad = 1 \\ x-ay+2z \quad = 2 \end{cases}$

har exakt en lösning.

3. Bestäm en ON- matris P och en diagonal matris $D$ så att $A = PDP^t$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 4-poängsuppgifter

4. Bestäm $\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{t}} \mathbf{A}^{\mathbf{t}}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Tips. $(AB)^t = B^t A^t$.

5. Bestäm kurva $y = ax + b\ln x$ som bäst approximerar punkterna $(1,-1),(2,0)$ och $(4,1)$ i minstakvadratmetodens mening.

**6.** Bestäm matrisen $A$ för den linjära avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som projicerar en godtycklig vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ i $\mathbb{R}^3$ vinkelrätt på linjen $(x,y,z) = t(1,-1,1)^t$.
Ange även bilden av vektorn $\vec{u} = (3\ 4\ 5)^t$.
Tips. Sök den ortogonala projektionen av $\vec{u} \neq \vec{0}$ på linjen.

7. Visa att om en symmetrisk, $\mathbf{A}$ satisfierar $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ , så är $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.
Tips. Jämför med tal 3.

**Lycka till**

**Lösningsförslag till Tentamenskrivning, 2006-12-19, kl. 08.00-13.00**
**5B1146, linjär algebra med geometri för IT och ME (5p)**

1.Vektorerna u = (–1,–2,2) resp v = (1,–2,1) är linjernas riktningsvektorer. vektorn n = u$\times$v är det sökta planets normalvektor. Vi har

$$n = u\times v = \begin{vmatrix} ex & ey & ez \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2ex + 3ey + 4ez = (2,3,4).$$ Det sökta planets

ekvation ges av

$$(2,3,4)\,.\,(x-3,\ y-1,\ z+1) = 0 \ \text{ alltså } \ 2x + 3y + 4z = 5$$

$\boxed{\text{Svar: } 2x + 3y + 4z = 5.}$

2. Ekvationssystemet har exakt en lösning om och endast om determinanten det(A) $\neq 0$, där A är systemets koefficientmatris. Här har vi
det(A) =

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 2 \end{vmatrix} (\text{-1)rad2 tillrad3}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1 \end{vmatrix} (\text{-3)rad2 till rad1}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & a-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-a & 1 \end{vmatrix} (\text{rad2 byter plats med rad1}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & -1-a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a-3 \\ -1-a & 1 \end{vmatrix} = -(-1-(-1-a)(a-3)) = a^2 - 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{5}$$

Svar: $a \neq 1 \pm \sqrt{5}$

3. matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är symmetrisk. Då finns en övergång ON –matris P som diagonalisera A.dvs $A = PDP^t$.

a) egenvärdena till A ges av

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & \\ -1 & 1-\lambda & \\ & & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,1,2$$

b) Egenvektorer till $\lambda = \lambda_k$ ges av $(A - \lambda_k I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

För $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \Rightarrow x = y = t \Rightarrow \\ z = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Välj $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

För $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-1 & -1 & 0\\ -1 & 1-1 & 0\\ 0 & 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0\\ -x=0\\ z = \text{gotycklig t.ex=1}\end{cases} \Rightarrow x = y = t \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Välj $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

För $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-2 & -1 & 0\\ -1 & 1-2 & 0\\ 0 & 0 & 1-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y=0\\ -x-y=0 \Rightarrow x=-y=t \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ z=0\end{cases}$

Välj $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

ON-matrisen P ges då av

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow PP^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{Svar } P^tAP = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

4. Vi använder kända räkneregler.

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}^{-1}\right)\right)^{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + I\right)^{\mathbf{t}} = \mathbf{A}^{\mathbf{tt}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + I^{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} + I$$

Alltså

$$\left(\mathbf{A^t}+\mathbf{A^{-1}}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A^t}=\mathbf{AA^t}+I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

Svar: $\left(\mathbf{A^t}+\mathbf{A^{-1}}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A^t}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$. Men är detta sant? Vi har räknat utan tänka. . Vi kollar först om $A^{-1}$ finns $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$ . Här är $\det(A)=0$ och således går ej att bestämma den givna uttrycket.Tal à 4p kräver lite tänkande. Går ej att bestämma uttrycket $\left(\mathbf{A^t}+\mathbf{A^{-1}}\right)^{\mathbf{t}}\mathbf{A^t}$

5. Lösning

Anpassning av de tre punkterna $(1,-1),(2,0)$ och $(4,1)$ till kurva $y=ax+b\ln x$

Ger följande överbestämda system

$$\begin{cases}a\qquad\qquad=-1\\2a+b\ln 2=0\\4a+b2\ln 2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\2&\ln 2\\4&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

normalekvation blir då

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&\ln 2&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&\ln 2\\4&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&\ln 2&2\ln 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}21&10\ln 2\\10\ln 2&5\ln^2 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\ln 2\end{pmatrix}$$

detta system kan lösa exempelvis (ej nödvändigt) med Cramers regel

$$a=\frac{\begin{vmatrix}3&10\ln 2\\2\ln 2&5\ln^2 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}21&10\ln 2\\10\ln 2&5\ln^2 2\end{vmatrix}}=\frac{-5\ln^2 2}{5\ln^2 2}=-1$$

$$b=a=\frac{\begin{vmatrix}21&3\\10\ln 2&2\ln 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}21&10\ln 2\\10\ln 2&5\ln^2 2\end{vmatrix}}=\frac{12\ln 2}{5\ln^2 2}=\frac{12}{5\ln 2}$$

Svar: den sökta kurvan är $y=-x+\dfrac{12}{5\ln^2 2}\ln x$

6. En godtycklig vektor $\vec{u}=(x,y,z)^t$ projiceras vinkelrätt på linjen dvs längs riktningsvektor $\vec{a}=(1,-1,1)^t$ ges av

$$proj_{\vec{a}}\vec{u} = \left[\frac{\vec{u} \bullet \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\right]\vec{a} = \left[\frac{(x,y,z)\bullet(1,-1,1)}{(1,-1,1)\bullet(1,-1,1)}\right]\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{x-y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}x-y+z\\-x+y-z\\x-y+z\end{bmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

**<u>Svar:</u>** Den sökta standard matrisen till den ortogonala projektionen på linjen ges av

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Bilden av $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ ges av $A\vec{u} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3-4+5\\-3+4-5\\3-4+5\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Bilden av $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ ges av $\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ som är parallel med linjen.

7. Varje symmetrisk matris $\mathbf{A}$ kan ortogonalt diagonalliseras. Detta innebär att det finns en ON-matris $\mathbf{P}$ Så att matrisen $\mathbf{A}$ kan skrivas $\mathbf{P}^t\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, där $\mathbf{D}$ är en diagonalmatris som består av egenvärdena till matrisen $\mathbf{A}$. Vi får att $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^t$. Detta medför att $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P^tD^2P}$. Om $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{P^tD^2P = 0 \Rightarrow D^2 = P0P^t = 0.}$ (Obs ON- matrisen $\mathbf{P}$ uppfyller $\mathbf{P}^t\mathbf{P} = \mathbf{PP}^t = I$)

Men Diagonalmatrisen $\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0\\0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0\\0 & \lambda_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n^2\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

Matrisen $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ om och endast om $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \cdots = \lambda_n^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$.
Vilket så visas.