Kapitel 1

Vektorer, matriser och linjära ekvationssystem

Här skall vi definiera vektorer och matriser samt med exempel illustrera vad sådana storheter kan användas till. Du skall nöta in definitioner, elementära egenskaper och räkneregler via handräkningar och datorarbete i MATLAB. Med den nyvunna kunskapen formulerar vi och löser ett antal linjära ekvationssystem från olika tillämpningsområden. Då Du själv genomfört några liknande uppgifter går vi vidare med några algebraiska räkneövningar och diskuterar egenskaper hos lösningar till linjära ekvationssystem. Kapitlet avslutas med formulering och diskussion av lösningsteknik för ett lite större praktiskt problem.

1.1 Läsanvisningar för kapitlet

- Gå igenom **vektorer** i sektionerna 2 och 3 i kapitlet, och läs därefter Andersson sektion 2.1 men hoppa över Ex 2.10 och 2.13. Gör sektionens övningsexempel.

- Läs om **matriser** i sektion 4 i kapitlet. Genomför fortlöpande de MATLAB exempel som visas och läs Andersson enligt referenserna i kapitlet. Läs därefter sektion 2.2 t.o.m Ex 2.40 i Andersson. Verifiera gärna en del av de kalkyler som illustreras i läroboken med hjälp av MATLAB. Gör sektionens övningsexempel.

- Gå igenom **formulering av linjära ekvationssystem** i sektion 5 av kapitlet. Läs därefter Andersson, sektion 3.1. Fördjupa er *inte* i exempel 3.4, lösbarhetsegenskaper; vi skall återkomma till detta viktiga ämnesområde i ett senare kapitel. Formulera och lös Ex 3.1-3.3 i MATLAB. I Ex 3.2 kan datorn inte beräkna någon lösning; vi återkommer med förklaringar och teknik för detta exempel i ett senare kapitel. Gör sektionens övningsexempel.

- Arbeta med **några algebraiska förenklingar** i sektion 6 av kapitlet och läs därefter sektion 2.2 fr.o.m Ex 2.40 i Andersson. Gör övningsexemplen som hör till sektionen.

- Bekanta er med **linearitet** i sektion 7.

- Gör insändningsuppgifterna.

Lycka till! / Bengt Lindberg

1.2 Vektorer, inledning

En *(kolumn-)vektor* är en samling av tal

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Talen $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ kallas vektorns komponenter. Antalet komponenter n kallas vektorns *dimension*. Vektorns komponenter kan användas för att ange värden av storheter, som beskriver en situation eller ett tillstånd. När vi refererar till en godtycklig komponent av en vektor, säger vi "den i-te komponenten av vektorn".

Exempel 1.2.1 En bilfirma säljer fyra olika bilmodeller. Försäljningen under en viss tidsperiod kan anges med en vektor med fyra komponenter, d.v.s. en vektor med dimensionen=4.

w_1 står för antalet under perioden sålda bilar av modell 1.

w_2 står för antalet under perioden sålda bilar av modell 2.

w_3 står för antalet under perioden sålda bilar av modell 3.

w_4 står för antalet under perioden sålda bilar av modell 4.

Försäljningen under mars månad 1992 var till exempel

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Som synes såldes t.ex. 18 bilar av modell 4. Försäljningen månad för månad för de 6 första månaderna 1992 anges av följande 6 vektorer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

T.ex. kan vi här avläsa att modell 3 under maj månad såldes i 14 exemplar.

Vektorerna kan lätt representeras i dator för vidare bearbetning.

En *radvektor* är en samling av tal

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

För det mesta kommer vi att använda oss av kolumnvektorer, så om inte annat sägs så är vektor detsamma som kolumnvektor.

Exempel 1.2.2 En vanligt förekommande uppgift i gymnasiematematiken är att rita grafer för enkla funktioner. Grafen för funktionen

$$y = x^3 - 2x^2 + 2$$

skall ritas i ett xy-koordinatsystem. Vi beräknar därför funktionens värde för några olika värden på x. I tabellen nedan finns resultatet av dessa beräkningar.

x	y
-2	-14
-1	-1
0	2
1	1
2	2
3	11
4	34

Tabell 1.1: $y = x^3 - 2x^2 + 2$

Denna tabell kan vi uppfatta som två stycken vektorer

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 11 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Den i-te komponenten av $\mathbf{y}$ är funktionsvärdet $x_i^3 - 2x_i^2 + 2$, d.v.s. funktionsvärdet för $x = x_i$.

Om man sedan vill rita även funktionen $u = xe^{-0.5x}$ i samma figur, så tabelleras funktionen för samma x-värden som ovan. Vi får då vektorn

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5.4366 \\ -1.6487 \\ 0 \\ 0.6065 \\ 0.7358 \\ 0.6694 \\ 0.5413 \end{pmatrix}$$

Den i-te komponenten av $\mathbf{u}$ är funktionsvärdet $x_i e^{-0.5x_i}$, d.v.s. funktionsvärdet för $x = x_i$.

Som synes har vektorerna $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{u}$ samtliga dimensionen 7.

Senare skall vi använda datorn till att göra den här typen av uppgifter.

Exempel 1.2.3 Lagret vid en tillverkande industri omfattar 203 olika artikelslag. Antalet enheter i lager av respektive slag kan representeras av en vektor **a** med dimensionen 203. Priset per enhet för respektive artikelslag kan representeras av en vektor **p** av dimensionen 203; komponent nr i av **p** utgörs av priset i Kr för en enhet av artikelslag nummer i.

Lagrets totala värde V i Kr kan då beräknas enligt

$$V = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + \cdots$$

$$+a_{202}p_{202} + a_{203}p_{203}$$

Exempel 1.2.4 Vektorer med två komponenter

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

kan åskådliggöras med vektorpilar i ett plan.

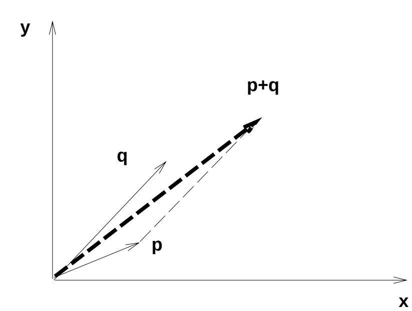
Punkten P i koordinatsystemet i figuren anges av två tal $(2, 1)$. Det första är $x-$koordinaten och det andra $y-$koordinaten för punkten. Vi kan representera punkten med vektorn

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

På motsvarande sätt kan punkten Q representeras med vektorn

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I gymnasiefysiken har vektorer i planet åskådliggjorts med vektorpilar med fotpunkt i origo och spets i den aktuella punkten. Vektoraddition kan sedan utföras genom parallellförflyttning av en av pilarna, så att dess fotpunkt sammanfaller med den andra vektorns spets.



Vi skall senare se att addition av två vektorer utförs genom att motsvarande komponenter av vektorerna adderas. T.ex. så får vi

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{r}$$

Om ni kommer ihåg vektoraddition från gymnasiet kan ni här gärna kontrollera att addition av vektorpilar i exemplet ovan ger samma resultat som vår generella vektoraddition.

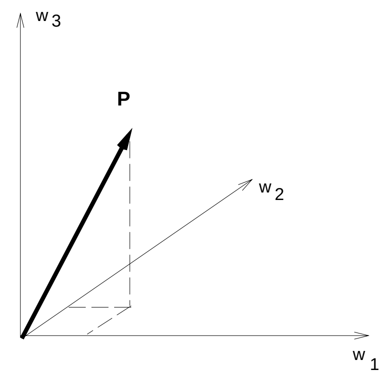
Exempel 1.2.5 Vektorer med tre komponenter

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

kan åskådliggöras med vektorpilar i ett tredimensionellt koordinatsystem. Vektorn

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

svarar mot punkten P med koordinaterna $(1, 1, 4)$. Pilen från origo $(0, 0, 0)$ (fotpunkten) till punkten P representerar vektorn $\mathbf{p}$.



1.3 Vektorer, addition, subtraktion, mm

Låt $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$ vara vektorer med n komponenter. Den $i-$te komponenten av $\mathbf{x}$ betecknas med x_i. Motsvarande gäller för de övriga vektorerna.

Vi definierar *addition* enligt

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \mathbf{z}$$

d.v.s. $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ om $z_i = x_i + y_i$ för $i = 1, 2, \ldots, n$. För att addera två vektorer adderar vi motsvarande komponenter av de två vektorerna.

Vi definierar *subtraktion* enligt

$$\mathbf{x}-\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{pmatrix} = \mathbf{z}$$

d.v.s. $\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{y}$ om $z_i = x_i - y_i$ för $i = 1, 2, \ldots, n$. För att subtrahera två vektorer subtraherar vi motsvarande komponenter av de två vektorerna.

Vi definierar *multiplikation med skalär* enligt

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \mathbf{z}$$

d.v.s. $\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}$ om $z_i = \alpha x_i$ för $i = 1, 2, \ldots, n$. Att multiplicera en vektor med en skalär innebär att man multiplicerar varje komponent av vektorn med skalären.

Några exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$5\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En kolumnvektor kan omvandlas till en radvektor genom *transponering*. Transponeringsoperatorn skrivs ^{T} eller ^{t} och definieras enligt:

Givet kolumnvektorn

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

så är $\mathbf{x}^T$ en radvektor med lika många komponenter och med samma komponenter som $\mathbf{x}$, d.v.s.

$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Givet en radvektor $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ så är $\mathbf{y}^T$ en kolumnvektor med lika många komponenter och med samma komponenter som $\mathbf{y}$, d.v.s.

$$\mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

En konsekvens av definitionen av transponering är att om en vektor transponeras två gånger så återfås den ursprungliga vektorn:

$$(\mathbf{x}^T)^T = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{y}^T)^T = \mathbf{y}$$

Skalärprodukten av två kolumnvektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{z}$ med n komponenter definieras enligt

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{z} = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n = \sum_{j=1}^{n} x_j z_j$$

Resultatet är en *skalär* storhet, d.v.s. *ett* siffervärde.

Produkten kan också skrivas enligt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n = \sum_{j=1}^{n} x_j z_j$$

Den sista beskrivningen av skalärprodukten är den som är viktigast för våra behov. Vi skall senare se att den är ett specialfall av produkten av en matris och en vektor. Produkten $\mathbf{xz}$ är *inte* definierad om båda vektorerna är kolumnvektorer.

Några exempel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}^T = (1 \quad 4 \quad 2 \quad 6)$$

$$(-1 \quad 3 \quad -4)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$(1 \quad 4 \quad 2 \quad 6) \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 8 = 63$$

Vektorn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

kallas *nollvektorn* och betecknas ofta $\mathbf{0}$.

Vektorerna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

kallas *basvektorerna* eller *enhetsvektorerna*. Den $i-$te enhetsvektorn betecknas med $\mathbf{e}_i$.

1.3.1 Övningsexempel

1. Övning 2.1 (ej e,f,g) på sid 167 i Andersson. Gör uppgifterna både för hand och i MATLAB.

2. Övning 2.5 på sid 167 i Andersson.

1.4 Matriser

En matris är ett rektangulärt schema av tal.

Exempel 1.4.1:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

är en matris med 3 rader och 3 kolumner (kolonner). Vi säger att matrisen är *av typ* 3×3, eller att A är en 3×3 matris. Talen $4, 8, \ldots$ är matrisens *element*. Denna matris har element som har heltalsvärden. Matriser brukar betecknas med stora bokstäver, medan matriselementen anges med små bokstäver. Så refererar vi t.ex. till elementet på rad 2, kolumn 3 (d.v.s. värdet 9) enligt a_{23}. De två indexvärdena anger i den ordning de står: radnummer (=2) och kolumnnummer (=3).

En matris B av typ $m \times n$ skriver vi

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisens *element* betecknas med b_{ij}. Matrisen har m rader och n kolumner. Ibland skriver vi matrisen enligt

$$B = (b_{ij})$$

Exempel 1.4.2 Matrisen $C = (c_{ij})$ med $c_{ij} = 2i + j + 12$ skriver vi om matrisen är en 4×4-matris enligt

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{pmatrix}$$

T.ex. är elementet $c_{43} = 2 \times 4 + 3 + 12 = 23$. Den andra kolumnen i matrisen är

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 20 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Den tredje raden i matrisen är

$$\begin{pmatrix} 19 & 20 & 21 & 22 \end{pmatrix}.$$

Matriselementen används för att ange värden av storheter, som beskriver en situation eller ett tillstånd. Matriser kan t.ex. användas för att på kompakt form ange samband mellan olika storheter.

Exempel 1.4.3 Bageriet Tre Limpor har specialiserat sig på matbröd och bakar 3 olika sorter: ljusa limpan, grova limpan och mellanlimpan. De tre sorterna innehåller alla tre olika sorters mjöl (vete, graham, råg), men i olika proportioner. Till ett kilo limpa går det åt

- ljusa limpan: 7 hg vetemjöl, 1 hg grahamsmjöl, 1 hg rågmjöl
- mellanlimpan: 4 hg vetemjöl, 2 hg grahamsmjöl, 2 hg rågmjöl
- grova limpan: 2 hg vetemjöl, 3 hg grahamsmjöl, 4 hg rågmjöl

I limpan finns även andra ingredienser så limpans totalvikt blir ett kg.

Recepten ovan kan vi ställa upp i en matris

$$B = \begin{array}{r} \\ ljusa\,limpan \\ mellanlimpan \\ grova\,limpan \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} vete & graham & \text{råg} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

För att åskådliggöra vad de olika kolumnerna och raderna står för har vi skrivit mjölsorterna över kolumnerna, och brödsorterna till vänster om raderna. Det är lätt att jämföra de ursprungliga recepten och matrisen. Den andra raden i matrisen t.ex. talar om hur mycket av de tre mjölsorterna som går åt till en mellanlimpa.

Vi kan alternativt representera recepten i matrisen

$$C = \begin{array}{r} \\ vete \\ graham \\ \text{råg} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ljusa & mellan & grova \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Här anger t.ex. den tredje raden hur mycket rågmjöl som går åt för att baka tre limpor, en av vardera sorten. Kolumnerna anger mjölfördelningen för resp. limpsort, d.v.s. det som raderna i matrisen B anger.

En dag skall man baka 90 ljusa limpor, 40 mellanlimpor och 70 grova limpor. Hur mycket mjöl går det åt av de olika sorterna?

Låt antalet limpor av de olika sorterna representeras av en kolumnvektor

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

där z_1 = antalet ljusa limpor, z_2 = antalet mellanlimpor, och z_3 = antalet grova limpor, d.v.s. för den aktuella dagen

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 90 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Låt mängden mjöl av de olika sortena representeras av en kolumnvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

där v_1 = mängd vetemjöl i hg, v_2 = mängd grahamsmjöl i hg, och v_3 = mängd rågmjöl i hg.

För den aktuella dagen får vi då t.ex.

$$v_3 = 1 \times 90 + 2 \times 40 + 4 \times 70 = 450$$

Mängden rågmjöl som behövs i resp. limpslag multipliceras med antalet limpor av resp. slag och adderas sedan.

Uttryckt med våra matriser och vektorer så har vi tagit värdena på sista raden i matrisen C och multiplicerat dem parvis med elementen i vektorn $\mathbf{z}$ och därefter adderat och kallat resultatet för v_3.

Motsvarande kan göras för de två andra mjölsorterna.

Dessa kalkyler kan sammanfattas enligt

$$\mathbf{v} = C\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 380 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Detta är ett exempel på produkten av en matris och en vektor, som vi senare skall definiera formellt.

Bageriet Tre Limpor har stora framgångar med sina läckra produkter och ror hem en order om leverans av totalt 200 limpor/dag av varje sort. Bageriets kapacitet räcker inte till för denna stora order, utan man söker samarbete med bagerierna Dala Limpan och Limp Bagarn. Bagerierna kommer överens om att fördela tillverkningen av de totalt 600 limporna på följande sätt

$$D = \begin{array}{r} \\ ljusa\,limpan \\ mellanlimpan \\ grova\,limpan \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} TreLimpor & DalaLimpan & LimpBagarn \end{array} \\ \begin{pmatrix} 70 & 80 & 50 \\ 50 & 90 & 60 \\ 40 & 90 & 70 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vi ser här t.ex. att Limp Bagarn skall tillverka bl.a. 60 st mellanlimpor per dag. En kolumn i D anger antalet limpor av respektive slag som det aktuella bageriet skall tillverka.

Chefen för hela samarbetsprojektet vill veta hur mycket mjöl (av de tre olika slagen) som vart och ett av bagerierna behöver.

Ett sätt att göra detta på är att undersöka ett bageri i taget. Limp Bagarens tillverkning kan representeras med

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Detta är kolumn 3 i matrisen D. Mjölåtgången får vi sedan på samma sätt som i första delen av detta exempel enligt

$$\mathbf{v} = C\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 \\ 380 \\ 450 \end{pmatrix}$$

På liknande sätt får vi från kolumn 1 av D för Tre Limpor

$$\mathbf{t} = C\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 770 \\ 290 \\ 330 \end{pmatrix}$$

För Dala Limpan får vi från kolumn 2 av D

$$\mathbf{u} = C\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 530 \\ 620 \end{pmatrix}$$

Dessa resultat kan vi sammanfatta i matrisen

$$F = \begin{array}{c} \\ vete \\ graham \\ rg \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} TreLimpor & DalaLimpan & LimpBagarn \end{array} \\ \begin{pmatrix} 770 & 1100 & 730 \\ 290 & 530 & 380 \\ 330 & 620 & 450 \end{pmatrix} \end{array} = (\,\mathbf{t} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v}\,)$$

Vi har helt enkelt ställt de tre vektorerna bredvid varandra som kolumner i matrisen F. Vi kan skriva de beräkningar vi gjort enligt

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 & 80 & 50 \\ 50 & 90 & 60 \\ 40 & 90 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 770 & 1100 & 730 \\ 290 & 530 & 380 \\ 330 & 620 & 450 \end{pmatrix}$$

Vi har bildat produkten av två matriser:

$$CD = F,$$

enligt

$$CD = C\,(\,\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z}\,) = (\,C\mathbf{x} \quad C\mathbf{y} \quad C\mathbf{z}\,) = (\,\mathbf{t} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v}\,) = F$$

Den första kolumnen av produkten CD får vi genom att multiplicera matrisen C med den första kolumnen av D, d.v.s. kolumnvektorn $\mathbf{x}$. På samma sätt får vi de övriga kolumnerna. Matrismultiplikation utförs genom att bilda ett antal produkter av matris och vektor. Antalet produkter är lika stort som antalet kolumner i den andra faktorn.

Övningsexempel:

1. Mata in matrisen C i MATLAB och
   (a) beräkna hur mycket mjöl som går åt för att baka 30 ljusa, 25 mellan och 60 grova limpor. Genomför även beräkningarna för hand.
   (b) Transponera matrisen C, d.v.s. skriv `C'` i MATLAB. Jämför resultatet med matrisen B ovan. Vi har ännu inte definierat transponering av en matris, men det kommer så småningom.
   (c) En dag tappar man räkningen på antalet försålda limpor, men vill ändå i efterhand försöka bestämma hur många man bakat den dagen. Mjölförbrukningen den aktuella dagen var:
      - 559 hg vetemjöl
      - 291 hg grahamsmjöl
      - 353 hg rågmjöl

      Kan Du beräkna hur många limpor av resp. sort som bakades den dagen. Här måste Du formulera och lösa ett linjärt ekvationssystem. Ekvationslösningen görs i MATLAB med (\), se sid 10 i MATLAB-introduktionen. Om du inte klarar denna deluppgift nu, behöver Du inte oroa dig, vi kommer att gå igenom exemplet senare.
2. Mata in matrisen D.
   (a) Skapa vektorerna $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, och $\mathbf{z}$ enligt
   ```
   x=D(:,1)
   y=D(:,2)
   z=D(:,3)
   ```
   (b) Beräkna därefter vektorerna $\mathbf{t} = C\mathbf{x}, \mathbf{u} = C\mathbf{y}$ och $\mathbf{v} = C\mathbf{z}$ enligt texten, och ställ samman dem till en matris F enligt
   ```
   F=[t u v]
   ```
   (c) Bilda produkten CD direkt och jämför med resultatet i b.

Exempel 1.4.4 Växelkurserna mellan SEK(svenska kronor), GBP(engelska pund), USD(US dollar) och DEM(tyska mark) anges i 4×4-matrisen

$$U = \begin{array}{c} \\ SEK \\ GBP \\ USD \\ DEM \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} SEK & GBP & USD & DEM \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.0000 & 11.0575 & 7.1650 & 4.4500 \\ 0.0904 & 1.0000 & 0.6480 & 0.4024 \\ 0.1396 & 1.5433 & 1.0000 & 0.6211 \\ 0.2247 & 2.4848 & 1.6101 & 1.0000 \end{pmatrix} \end{array}$$

För att åskådliggöra vad de olika raderna och kolumnerna står för har vi skrivit valutaslagen utanför matrisen. Element ij i matrisen anger hur mycket en enhet av valuta nummer j är värd i valuta nummer i. T.ex. anger $u_{31} = 0.1396$ att en enhet av valuta nummer 1 (d.v.s. 1 SEK) är värd 0.1396 enheter av valuta nummer 3 (d.v.s. 0.1396 USD). På samma sätt anger $u_{13} = 7.1650$ att en enhet av valuta nummer 3 (d.v.s. 1 USD), är värd 7.1650 enheter av valuta nummer 1 (d.v.s. 7.1650 SEK).

Ett internationellt företag har placeringar i olika tillgångar vars värde noteras i de fyra valutorna. Låt portföljens sammansättning representeras av en vektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

där p_i står för placerat belopp i valutaslag nummer i. Om företaget t.ex. har tillgångar för 20,000,000 DEM i sin portfölj, så gäller $p_4 = 20,000,000$, ty DEM är valuta nummer 4.

Med hjälp av matrisen U kan företaget beräkna värdet av sin totala portfölj i vilken som helst av de fyra valutaslagen:

$$\mathbf{v} = U\mathbf{p}$$

där $\mathbf{v}$ är en vektor med 4 komponenter, vars i-te komponent anger totala värdet av portföljen uttryckt i valuta nummer i.

Om portföljen är:

- 102,000,000 i SEK,
- 2,400,000 i GBP,
- 15,500,000 USD,
- 20,000,000 DEM

så representeras den av vektorn

$$\begin{pmatrix} 102,000,000 \\ 2,400,000 \\ 15,500,000 \\ 20,000,000 \end{pmatrix}$$

Portföljen totalvärde uttryckt i t.ex. SEK blir då summan av tillgångarna i resp. valutaslag gånger resp. valutakurs, d.v.s.

$$102,000,000 \times 1 + 2,400,000 \times 11.0575 + 15,500,000 \times 7.165+$$

$$20,000,000 \times 4.45 = 328,595,500$$

På liknande sätt får vi portföljens totalvärde i de övriga valutaslagen. Vi kan sammanfatta beräkningarna enligt:

$$\mathbf{v} = U\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 11.0575 & 7.1650 & 4.4500 \\ 0.0904 & 1.0000 & 0.6480 & 0.4024 \\ 0.1396 & 1.5433 & 1.0000 & 0.6211 \\ 0.2247 & 2.4848 & 1.6101 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 102,000,000 \\ 2,400,000 \\ 15,500,000 \\ 20,000,000 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 328,595,500 \\ 29,712,800 \\ 45,865,120 \\ 73,839,470 \end{pmatrix}$$

Vi kan då t.ex. avläsa att portföljens värde uttryckt i USD är 45,865,120 ($=v_3$).

Värdena på en rad i matrisen har multiplicerats samman med värdena i kolumnmatrisen **p** parvis och sedan adderats. Resultatet har sedan blivit en komponent av **v**.

Exempel 1.4.5 En uppsättning kemiska föreningar, som bildas genom kemiska reaktioner kan representeras av en matris kallad atommatrisen. Matriselementen anger hur många atomer av ett visst slag som ingår i en given förening. Varje kolumn representerar en slags atom, och varje rad svarar mot en kemisk förening.

För en blandning av ämnena $C_2H_4, C_2H_4O, O_2, CO_2, H_2O$ kan följande matris ställas upp.

$$A = \begin{array}{l} \\ C_2H_4 \\ C_2H_4O \\ O_2 \\ CO_2 \\ H_2O \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & H & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Med hjälp av denna matris kan vi beräkna föreningarnas molekylvikter. Om vi inför en vektor med de ingående atomernas atomvikter

$$\mathbf{a} = \begin{array}{c} C \\ H \\ O \end{array} \begin{pmatrix} 12.0112 \\ 1.0080 \\ 15.9994 \end{pmatrix}$$

så erhålls molekylvikterna enligt

$$\mathbf{m} = A\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.0112 \\ 1.0080 \\ 15.9994 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28.0544 \\ 44.0538 \\ 31.9988 \\ 43.9992 \\ 18.0154 \end{pmatrix}$$

Obsevera att vektorer kan uppfattas som specialfall av matriser.

- en kolumnvektor med dimensionen n är en matris av typ $n \times 1$,
- en radvektor av dimensionen m är en matris av typ $1 \times m$,

De flesta av räknereglerna för vektorer från föregående sektion kan lätt generaliseras till matriser, se Andersson sats 2.1 sid 129-130.

Det enda som kan bereda lite huvudbry är generaliseringen till multiplikation av två stycken matriser. Vi ger här ett exempel så kan ni därefter läsa mer detaljer i Andersson.

Exempel 1.4.6 Givet det två matriserna A och B, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

Vi skall beräkna $C = AB$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Produkten är en 3×2 matris där element nummer ij erhålls som produkten av den i-te raden av A med den j-te kolumnen av B. Då rad nr 1 i A multipliceras ihop med kolumn nr 2 i B så erhålls

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 = 9$$

Vi har alltså fått $c_{12} = 9$. Analogt gör vi för alla de övriga elementen i 3×2-matrisen C.

$$C = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 43 & 15 \\ 31 & 17 \end{pmatrix}$$

Vi kontrollerar våra beräkningar i följande MATLAB-session:

```
>> A=[1 1 2;2 5 1;6 1 3]

A =

     1     1     2
     2     5     1
     6     1     3

>> B=[2 1; 7 2; 4 3]

B =

     2     1
     7     2
     4     3

>> A*B

ans =

    17     9
    43    15
    31    17
```

Matrismultiplikationen kan beskrivas på flera olika sätt, alla leder förstås till samma slutresultat, men olika angreppssätt kan vara fördelaktiga i olika sammanhang. Vi såg i exemplet med Tre Limpor att det var naturligt att uppfatta matrisprodukten CD som en samling av kolumnvektorer, där varje kolumn erhölls som produkten av C med enskilda kolumner i D. Vi byggde där på att produkten av en matris och en vektor är väldefinierad; komponenterna i den resulterande kolumnvektorn fås som produkten av en rad i matrisen och hela vektorn. Det vi egentligen har gjort är att vi bildat ett antal skalärprodukter och ställt samman dem i en matris.

För att beskriva matrismultiplikationen med hjälp av skalärprodukten för vektorer, kan vi uppfatta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

som uppbyggd av de tre radvektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dessa tre radvektorer kan vi uppfatta som tre st transponerade kolumnvektorer

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Med dessa beteckningar skriver vi matrisen som

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \\ \mathbf{a}_2^T \\ \\ \mathbf{a}_3^T \end{pmatrix}$$

Matrisen B är analogt uppbyggd av de två kolumnvektorerna

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

enligt

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

Observera att vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ alla har samma antal komponenter, så det är möjligt att beräkna skalärprodukterna $\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j$. Element nummer ij i matrisen C definierar vi nu enligt

$$c_{ij} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + a_{i3} \times b_{3j}$$

så hela matisen blir

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{b}_2 \\ \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_2 \\ \\ \mathbf{a}_3^T \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_3^T \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 43 & 15 \\ 31 & 17 \end{pmatrix}$$

Formlerna ovan generaliseras lätt till andra matriser.

1.4.1 Övningsexempel

Gör exemplen för hand och kontrollera om möjligt i MATLAB. Du skall här försöka nöta in en del grundläggande egenskaper hos matriser.

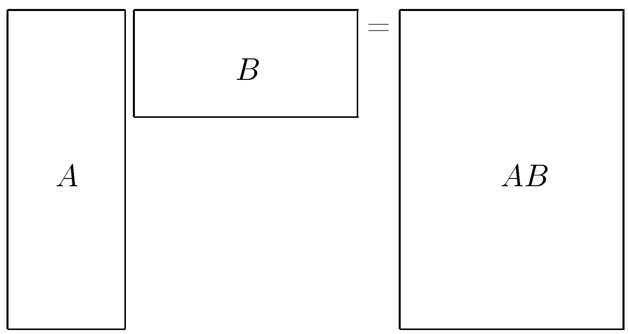
1. Övning 2.6-2.9 på sid 167-168 i Andersson. Detta är mycket enkla övningar.

2. Övning 2.10 på sid 168 i Andersson. I MATLAB kan Du använda `a1=A(1,:)` för att skapa en (rad)vektor av första raden av A, och `b2=B(:,2)` för att skapa en (kolumn)vektor av andra kolumnen av B. Värdet av c_{12} får Du sedan som `a1*b2`.

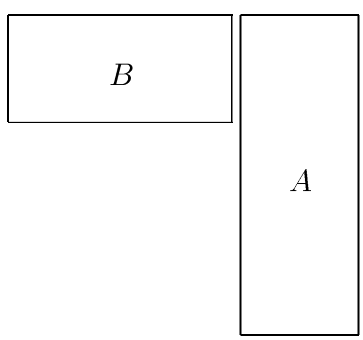
3. Övning 2.11 på sid 168 i Andersson. Räkna både för hand och i MATLAB

4. Övning 2.13 på sid 169 i Andersson. Del a) är mycket viktig. Rita gärna rektanglar för att för Dig själv illustrera antalet rader och kolumner i matriserna, för att på så sätt dels kontrollera om produkten kan bildas, dels illustrera vilken typ resultatet har:

   Matrisen A har 6 rader och 2 kolumner, B har 2 rader och 4 kolumner. Kan produkterna AB och BA bildas? Hur många rader och kolumner har resultaten?

   Produkten AB är väldefinierad, det är en 6×4 matris. Varje element får vi som produkten av en rad av A med en kolumn av B, d.v.s. produkten av vektorer av dimensionen 2.

   Produkten BA är ej definierad, ty antalet kolumner i B (4) stämmer ej med antalet rader i A (6).

5. Övning 2.16 a,b på sid 169 i Andersson.

1.5 Formulering av Linjära ekvationssystem

Vi formulerar linjära ekvationssystem från några olika områden, och löser dem i MATLAB. Sektionen består enbart av illustrativa exempel.

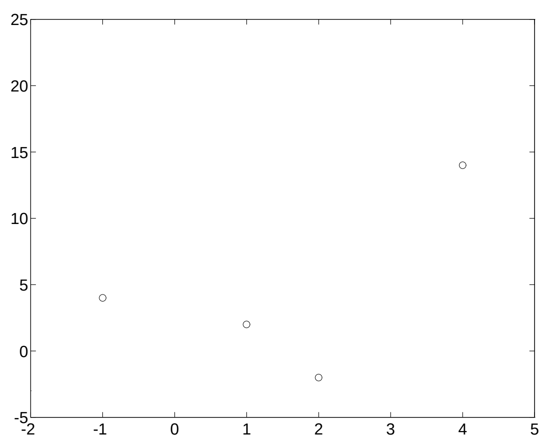
1.5.1 Polynom genom fyra punkter

Finns det något tredjegradspolynom

$$P(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

sådant att polynomets graf passerar genom de fyra punkter i (x, y)-planet som anges i nedanstående tabell och figur?

x	y
-1	4
1	2
2	-2
4	14



Lösning: Koefficienterna c_1, c_2, c_3, c_4 i polynomet är ej kända. Vi skall försöka bestämma dem så att följande fyra villkor uppfylls

$$\begin{array}{ll} P(-1) & = 4 \\ P(1) & = 2 \\ P(2) & = -2 \\ P(4) & = 14 \end{array}$$

d.v.s. vi vill bestämma c_1, c_2, c_3, c_4 så att

$$\begin{array}{llllllll} c_1 - & & c_2 + & & c_3 - & & c_4 & = 4 \\ c_1 + & & c_2 + & & c_3 + & & c_4 & = 2 \\ c_1 + & 2 & c_2 + & 4 & c_3 + & 8 & c_4 & = -2 \\ c_1 + & 4 & c_2 + & 16 & c_3 + & 64 & c_4 & = 14 \end{array}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med fyra ekvationer för våra fyra obekanta c_1, c_2, c_3, c_4. Med matris- och vektorbeteckningar kan vi skriva systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

eller

$$A\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

där vi definierat matrisen A enligt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

och vektorerna $\mathbf{c}$ och $\mathbf{y}$ enligt

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

I MATLAB formulerar vi och löser detta linjära ekvationssystem på följande sätt:

```
>> x=[-1;1;2;4];

>> A=[1 -1  1 -1
      1  1  1  1
      1  2  4  8
      1  4 16 64];
A =

     1    -1     1    -1
     1     1     1     1
     1     2     4     8
     1     4    16    64


>> y=[4;2;-2;14]
y =

     4
     2
    -2
    14

>> c=A\y
c =

    6.0000
   -2.0000
   -3.0000
    1.0000
```

Som synes ovan har vi fått

$$\begin{aligned} c_1 &= 6 \\ c_2 &= -2 \\ c_3 &= -3 \\ c_4 &= 1 \end{aligned}$$

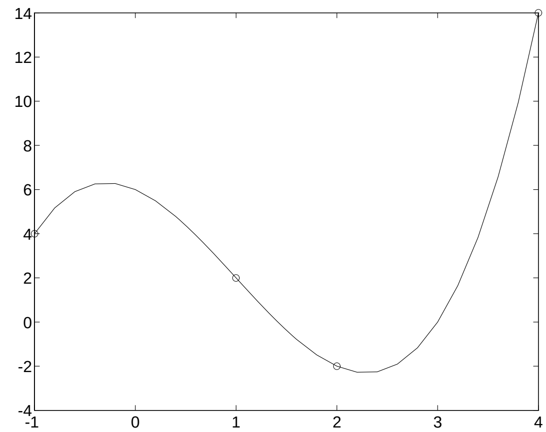
så polynomet är

$$P(x) = 6 - 2x - 3x^2 + x^3$$

Vi ritar därefter upp grafen för polynomet $P(x)$ enligt:

```
>> xp=[-1:0.2:4]';
>> p=c(1)+c(2)*xp+c(3)*xp.^2+c(4)*xp.^3;
>> plot(xp,p,x,y,'o')
```

Den uppritade grafen finns på nästa sida. Ringarna markerar de fyra tabellpunkterna.



Tredjegradspolynom genom fyra punkter.

1.5.2 Bageriet Tre Limpor

Vi anknyter till exemplet i sektion 1.4. Recepten för bageriets succelimpor sammanfattas i nedanstående matris.

$$
C = \begin{array}{l} \\ vete \\ graham \\ rg \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ljusa & mellan & grova \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Här anger t.ex. den tredje raden hur mycket rågmjöl som går åt för att baka tre limpor, en av vardera sorten. Kolumnerna anger mjölåtgången för respektive limpsort.

Ett av övningsexemplen i sektion 1.4 var:

En dag tappar man räkningen på antalet försålda limpor, men vill ändå i efterhand försöka bestämma hur många man bakat den dagen. Mjölförbrukningen den aktuella dagen var:

- 559 hg vetemjöl
- 291 hg grahamsmjöl
- 353 hg rågmjöl

Hur många limpor av respektive sort bakades den aktuella dagen?

Lösning: Använd samma beteckningar som tidigare,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

där v_1 = mängd vetemjöl i hg, v_2 = mängd grahamsmjöl i hg, och v_3 = mängd rågmjöl i hg. För den aktuella dagen har vi

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 559 \\ 291 \\ 353 \end{pmatrix}$$

Antag därefter att man sålt z_1 ljusa limpor, z_2 mellanlimpor, och z_3 mörka limpor. Definiera vektorn

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Vi har således en vektor vars komponenter ej är kända, men vi kan uttrycka mjölförbrukningen med hjälp av denna okända vektor:

Förbrukningen av vetemjöl $v_1 = 7z_1 + 4z_2 + 2z_3 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3$. Detta är första raden av C gånger vektorn $\mathbf{z}$. För de två andra mjölsorterna gör vi på samma sätt och får

$$C\mathbf{z} = \text{mjölförbrukningen}$$

eller $C\mathbf{z} = \mathbf{v}$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 559 \\ 291 \\ 353 \end{pmatrix}$$

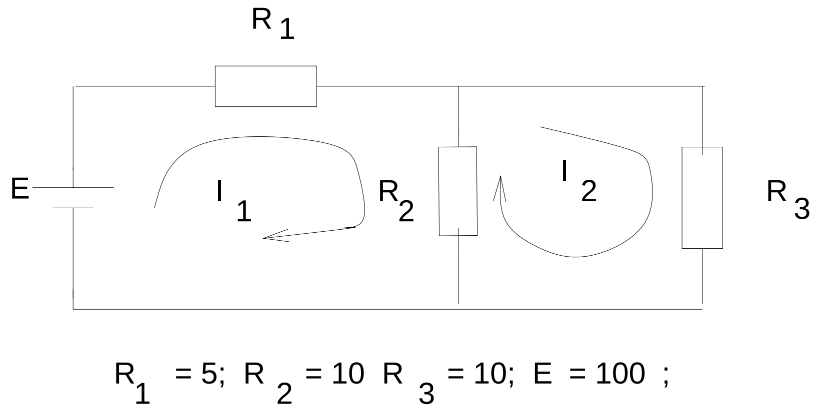
Vi formulerar och löser ekvationssystemet i MATLAB enligt

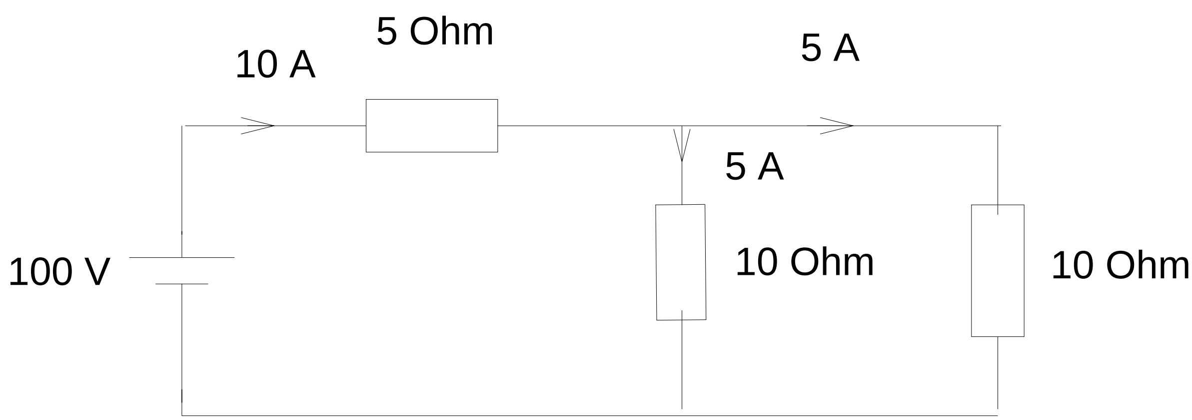
```
>> C=[7 4 2
      1 2 3
v       1 2 4]

C =

     7     4     2
     1     2     3
     1     2     4

>> v=[559;291;353]

v =

   559
   291
   353

>> z=C\v

z =

   45.0000
   30.0000
   62.0000
```

Den aktuella dagen hade man således tillverkat 45 ljusa limpor, 30 mellanlimpor och 62 mörka limpor.

1.5.3 Resistansnät

En spänningskälla med spänningen 100 V är kopplad till ett elektriskt nät bestående av resistanser enligt figuren nedan. Bestäm strömstyrkorna I_1 och I_2.





Lösning: Vi formulerar ekvationer med hjälp av följande räkneregler:

Ohms lag Spänningsfallet V över en resistans R p.g.a. strömmen I ges av $V = RI$.

Kirschoffs lag Spänningsfallet runt en slinga är noll.

Observera att genom resistansen R_1 går strömmen I_1, genom R_2 går strömmen $I_1 - I_2$, och genom R_3 går strömmen I_2. Strömmarnas riktningar antas vara som de anges med pilar i figuren.

Vi tittar först på slingan nr 1. Om vi startar vid E (=100) i figuren så får vi

$$R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) - E = 0$$

För slinga 2 får vi

$$R_3 I_2 + R_2(I_2 - I_1) = 0$$

Med siffervärden insatta för spänningen och resistanserna så får vi följande två ekvationer

$$5I_1 + 10(I_1 - I_2) = 100$$

$$10I_2 + 10(I_2 - I_1) = 0$$

vilket vi kan skriva

$$\begin{aligned} 15I_1 - 10I_2 &= 100 \\ -10I_1 + 20I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer för våra två obekanta I_1, I_2. Med matris- och vektorbeteckningar kan vi skriva systemet

$$\begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eller

$$A\mathbf{I} = \mathbf{e}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I MATLAB formulerar vi och löser systemet enligt

```
>> A=[15  -10
     -10   20]

A =

    15   -10
   -10    20

>> e=[100
        0]

e =

   100
     0

>> I=A\e

I =

   10.0000
    5.0000
```

Som synes blev $I_1 = 10$ och $I_2 = 5$ och strömmen genom resistansen R_2 är $I_1 - I_2 = 5$, med riktning uppifrån och nedåt i figuren.

Den här uppgiften kan lösas på enklare sätt utan linjära ekvationssystem, men för mer komplicerade elektriska nät är det inte möjligt. Vi ser den här uppgiften som en introduktion till nästa, mer komplicerade elektriska nät.

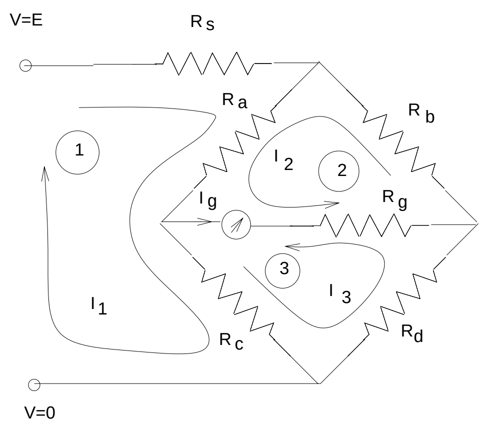
1.5.4 Resistansbrygga

Figuren nedan visar en resistansbrygga, som via en resistans R_s är kopplad till en spänningskälla med konstant spänning E. I bryggan finns ett mätinstrument inkopplat. Bestäm strömmen genom mätinstrumentet som funktion av resistansen R_c.

För att lösa problemet formulerar vi ett ekvationssystem för strömstyrkorna I_1, I_2 och I_3 i slingorna numrerade 1, 2 och 3 i figuren. För att formulera ekvationssystemet använder vi återigen:

Ohms lag Spänningsfallet V över en resistans R p.g.a. strömmen I ges av $V = RI$.

Kirschoffs lag Spänningsfallet runt en slinga är noll.



Ekvationerna för slinga 1, 2 och 3 i denna ordning blir

$$
\begin{array}{ccccccc}
I_1 R_s & + & (I_1 + I_2)R_a & + & (I_1 + I_3)R_c & = E \\
(I_1 + I_2)R_a & + & (I_2 - I_3)R_g & + & I_2 R_b & = 0 \\
(I_1 + I_3)R_c & + & I_3 R_d & + & (I_3 - I_2)R_g & = 0
\end{array}
$$

Vi skriver om detta system enligt

$$
\begin{array}{cccccccc}
(R_s + R_a + R_c)I_1 & + & R_a I_2 & + & R_c I_3 & = & E \\
R_a I_1 & + & (R_a + R_g + R_b)I_2 & - & R_g I_3 & = & 0 \\
R_c I_1 & - & R_g I_2 & + & (R_c + R_d + R_g)I_3 & = & 0
\end{array}
$$

Med matris och vektorbeteckningar skriver vi

$$
A\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

där

$$
A = \begin{pmatrix} R_s + R_a + R_c & R_a & R_c \\ R_a & -R_a + R_b + R_g & -R_g \\ R_c & -R_g & R_c + R_d + R_g \end{pmatrix}
$$

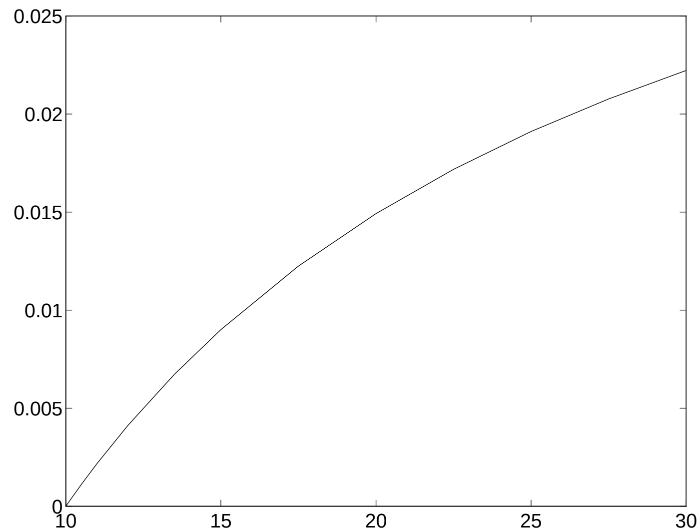
och

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

I MATLAB-programmet nedan formulerar vi och löser problemet för $R_s = 0.001$, $R_a = R_b = R_d = 10$, $R_g = 100$, $E = 10$ för några olika värden på R_c. I diagramet finns strömmen som funktion av R_c för R_c i intervallet 10 till 30.

Programkoden finns listad på nästa sida. Den finns dessutom i filen **brygga.m** på disketten. Tabellen och diagrammet nedan genereras då programmet körs.

```
>> brygga

ans =

   10.0000   -0.0000
   10.5000    0.0011
   11.0000    0.0022
   12.0000    0.0041
   13.5000    0.0067
   15.0000    0.0090
   17.5000    0.0122
   20.0000    0.0149
   22.5000    0.0172
   25.0000    0.0191
   27.5000    0.0208
   30.0000    0.0222
```



```
%*************************************************************
%                      Resistans brygga                     *
%*************************************************************
%Resistanserna och spänningskällan
Rs=0.001;  Ra=10; Rb=10; Rc=10; Rd=10; Rg=100;
E=10;

%Koefficientmatrisen
   A=[Rs+Ra+Rc      Ra       Rc
         Ra      Ra+Rg+Rb   -Rg
         Rc        -Rg    Rc+Rd+Rg];
%Högerledet
   b=[ E
       0
       0  ];

%Värden på Rc för tabellen och figuren
r=[10 10.5 11 12 13.5 15 17.5 20 22.5 25 27.5 30];
for i=1:12,
%      Formulera och lös ekvationssystemet som ger strömstyrkorna
%      i de tre slingorna. Endast fyra element i A i ändras för nytt Rc.
   Rc=r(i);
   A(1,1)=Rs+Ra+Rc; A(1,3)=Rc; A(3,1)=Rc; A(3,3)=Rc+Rd+Rg;
   x=A\b;

%      Galvanometerströmmen =I2 -I3
   Ig=x(2)-x(3);
   j(i)=Ig;     %lagra galvanometersrömmen i en vektor
end
[r' j']
plot(r,j);
```

I programmet ovan har vi använt en `for`-sats för att formulera och lösa 12 st olika linjära ekvationssystem. Det som står mellan raderna

`for i=1:12,` och `end`

utförs för i-värdena $1, 2, 3, \dots, 12$. Se Pärt, 12.4 för mer information om repetitionssatser.

1.5.5 Övningsexempel

1. Övning 3.1 på sid 215 i Andersson. Formulera och lös systemet i MATLAB.
2. Övning 3.2 på sid 215 i Andersson. Formulera systemet och försök att lösa det i MATLAB. Datorn klarar inte detta problem, vi återkommer i nästa kapitel med förklaringar och lösningsmetoder.
3. Övning 3.6 (sid 217) och övning 3.20 (sid 219) i Andersson. Lös i MATLAB.

1.6 Algebraiska manipulationer

Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara kolumnvektorer och α en skalär. Följande räkneregler följer av definitionerna i sektion 3

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T = \mathbf{x}^T - \mathbf{y}^T; \qquad (\mathbf{x}-\mathbf{y})^T\mathbf{z} = \mathbf{x}^T\mathbf{z} - \mathbf{y}^T\mathbf{z}; \qquad (\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - \alpha^2\mathbf{y}^T\mathbf{y}$$

Den sista regeln är en generalisering av konjugatregeln för skalära storheter. För att bekanta oss med denna regel och bevisa den börjar vi med några MATLAB-beräkningar:

Mata in vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ där

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

och beräkna

a. $(\mathbf{u}-3\mathbf{v})^T(\mathbf{u}+3\mathbf{v})$

b. $\mathbf{u}^T\mathbf{u} - 9\mathbf{v}^T\mathbf{v}$

I MATLAB får vi

```
>> u=[2;-5;4;2]

u =

     2
    -5
     4
     2

>> v=[1;1;-2;4]

v =

     1
     1
    -2
     4

>> (u-3*v)'*(u+3*v)

ans =

  -149


>> u'*u-9*v'*v

ans =

  -149
```

Tydligen ger a. och b. samma resultat. Detta förklaras med räknereglerna för vektorer enligt

$$(\mathbf{u} - 3\mathbf{v})^T(\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) =$$
$$(\mathbf{u}^T - 3\mathbf{v}^T)(\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) =$$
$$\mathbf{u}^T(\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) - 3\mathbf{v}^T(\mathbf{u} + 3\mathbf{v}) =$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{u} + \mathbf{u}^T(3\mathbf{v}) - 3\mathbf{v}^T\mathbf{u} - (3\mathbf{v}^T)(3\mathbf{v}) =$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{u} + 3\mathbf{u}^T\mathbf{v} - 3\mathbf{v}^T\mathbf{u} - 9\mathbf{v}^T\mathbf{v} =$$
$$\mathbf{u}^T\mathbf{u} - 9\mathbf{v}^T\mathbf{v}$$

Den sista likheten följer av att $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$ ty

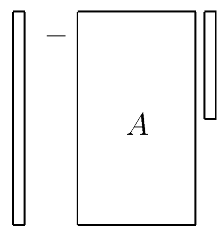
$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots u_nv_n =$$
$$v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots v_nu_n = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$$

Vi kommer i senare kapitel ha behov av att beräkna uttryck av formen

$$(\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}),$$

där $\mathbf{x}$ är en kolumnvektor med n komponenter och $\mathbf{b}$ är en kolumnvektor med m komponenter och A är en $m \times n$-matris, $m > n$.

Observera att $\mathbf{b} - A\mathbf{x}$ är en kolumnvektor med m komponenter, ty produkten $A\mathbf{x}$ av $m \times n$-matrisen A och kolumnvektorn $\mathbf{x}$ med n komponenter blir en kolumnvektor med m komponenter.



Hela uttrycket ovan är således en skalär storhet; skalärprodukten av en vektor med sig själv.

För att utveckla uttrycket ovan behövs några räkneregler:

- då en skalär transponeras så ändras den inte, d.v.s.

$$\alpha^T = \alpha \quad \text{där} \quad \alpha \quad \text{är en skalär.}$$

- transponatet av en produkt är produkten av transponaten i omvänd ordning, d.v.s

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{där} \quad A \text{ är } m \times n \quad \text{och} \quad B \text{ är } n \times p$$

  Observera att antalet kolumner i A (n) är lika med antalet rader i B, ty annars är produkten AB inte definierad. Beviset finns sist i sektion 2.2 i Andersson.

Vi skall använda specialfallet $p = 1$, d.v.s. B är en kolumnvektor.

$$\Phi = (\mathbf{b} - A\mathbf{x})^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) =$$
$$(\mathbf{b}^T - (A\mathbf{x})^T)(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) =$$
$$(\mathbf{b}^T - \mathbf{x}^T A^T)(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) =$$

$$\mathbf{b}^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) - \mathbf{x}^T A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) =$$
$$\mathbf{b}^T\mathbf{b} - \mathbf{b}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T A^T\mathbf{b} + \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} =$$
$$\mathbf{b}^T\mathbf{b} - 2\mathbf{x}^T A^T\mathbf{b} + \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}$$

Den sista likheten kommer sig av att $\mathbf{b}^T A\mathbf{x}$ är en skalär så

$$\mathbf{b}^T A\mathbf{x} = (\mathbf{b}^T A\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T A^T(\mathbf{b}^T)^T = \mathbf{x}^T A^T\mathbf{b}$$

1.6.1 Övningsexempel

1. Övning 2.12 på sid 168 i Andersson. Gör beräkningarna enbart i MATLAB.
2. Övning 2.16 c,d (sid 169) i Andersson. Om Du är osäker kan Du bekanta dig med problemet genom att välja några siffervärden för x_1, x_2 och x_3 och pröva i MATLAB.
3. Övning 2.2 (sid 167) i Andersson. Använd er av att $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$, detta är samma ledning som i boken, uttryckt med andra beteckningar.

1.7 Linearitet

Vi skall här studera några konsekvenser av att våra problem är *linjära*. Vi listar först några formler och skall senare se de praktiska konsekvenserna av dem.

Låt A vara en $n \times n$-matris, $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ kolumnvektorer av dimensionen n och α och β skalärer.

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x} \qquad A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}$$

Bevisen för dessa formler följer direkt av räknereglerna för produkten av en matris och en vektor, samt räknereglerna för skalära storheter.

Betrakta de två linjära ekvationssystemen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1) \qquad \text{och} \quad A\mathbf{y} = \alpha\mathbf{b} \quad (2)$$

där $\mathbf{b}$ är en given kolumnvektor av dimension n och α är en given skalär.

Finns det något enkelt samband mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$? Multiplicera relationen (1) med α, så får vi den nya relationen $\alpha A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{b}$. Denna relation kan enligt räkneregeln ovan skrivas $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{b}$. Om vi sätter $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ så har vi på detta sätt fått ekvation (2). Under förutsättning att ekvationssystemen (1) och (2) har entydiga lösningar så gäller:

$$\text{Om } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ har lösningen } \mathbf{x} \text{ så har } \quad A\mathbf{y} = \alpha\mathbf{b} \text{ lösningen } \mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$$

Betrakta de två linjära ekvationssystemen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3) \qquad \text{och} \quad A\mathbf{y} = \mathbf{c} \quad (4)$$

där $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är givna kolumnvektor av dimension n.

Då är $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ lösningen till

$$A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

ty enligt räknereglerna ovan (med $\alpha = \beta = 1$) gäller $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$

Exempel 1.7.1

Det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{pmatrix} -0.400 & 1.000 & 0.200 & 0.200 \\ 0.486 & -1.286 & 0.114 & -0.029 \\ -0.143 & 0.143 & 0.143 & -0.286 \\ 0.514 & -0.714 & -0.114 & 0.029 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.000 \\ 0.143 \\ -0.572 \\ 0.857 \end{pmatrix}$$

har lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3.000 \\ 1.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Bestäm lösningen till $A\mathbf{y} = 5\mathbf{b}$.

Lösning: Vi får direkt att $\mathbf{y} = 5\mathbf{x}$, d.v.s.

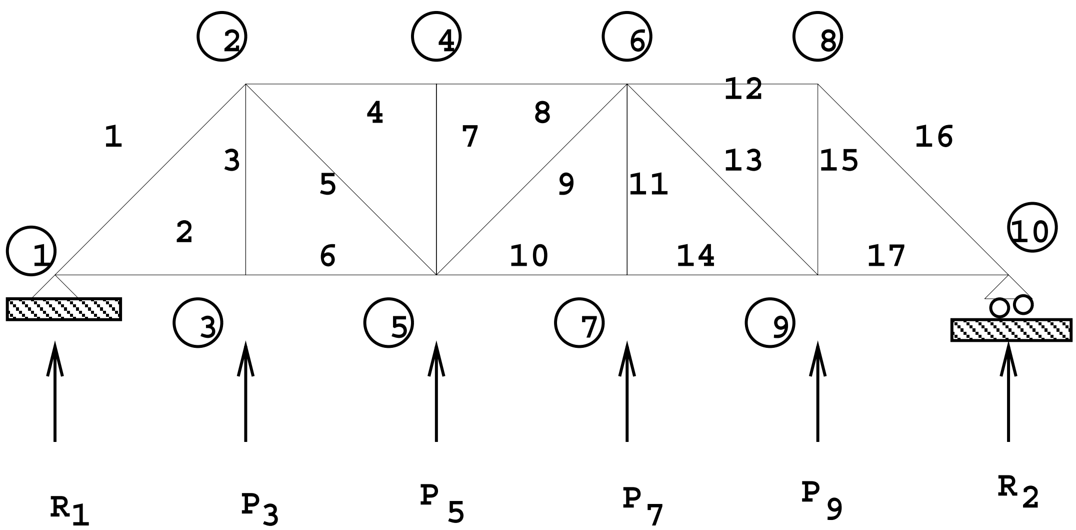
$$y = \begin{pmatrix} 15.000 \\ 5.000 \\ 0.000 \\ 5.000 \end{pmatrix}$$

1.7.1 Plant fackverk, ett "stort" linjärt ekvationssystem

För att ha behållning av detta exempel behöver Ni inte ha tidigare erfarenhet av plana fackverk. Det som vi försöker illustrera är allmänngiltigt för linjära ekvationssystem, och handlar om vad linearitet innebär. Vi vill ha ett system med rimligt många ekvationer, så Ni får se hur man organiserar sitt arbete för realistiska problem. Om Ni senare vill lösa ett problem med 100 obekanta så bör Ni kunna klara av det också.. För riktigt stora problem tillkommer nya svårigheter, som vi inte kan täcka i den här kursen. I nästa kapitel kommer vi att beröra hur datorn löser linjära ekvationssystem och hur mycket arbete datorn måste lägga ned (antalet aritmetiska operationer) för att bestämma lösningen.

För härledningen av ekvationerna behöver Ni kunna lite om kraftjämvikt. Om ni har glömt den relevanta gymnasiefysiken kan Ni hoppa över härledningen och nöja Er med den centrala studien av det linjära ekvationssystemet; givet ekvationerna på papper, studera lösningen med hjälp av dator.

Stångkrafterna i ett plant fackverk enligt figuren nedan satisfierar ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{f} = \mathbf{b}$.



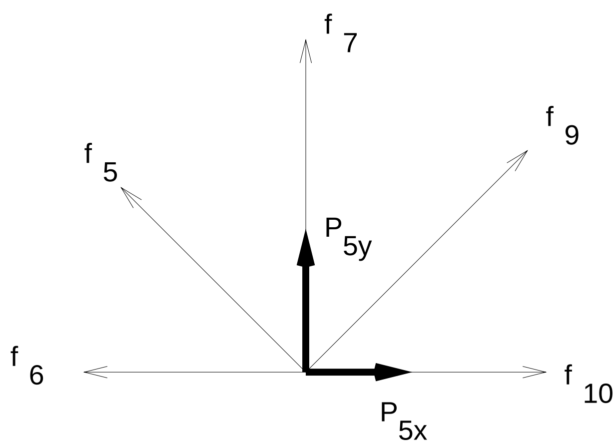
Stångkrafterna definieras som positiva när de är riktade bort från en nod, och de yttre lasterna definieras som positiva uppåt och åt höger i figuren. Ekvationerna härleds och redovisas på de följande sidorna.

Problem: Lasterna i fackverket i fig 1 består av nedåtriktade, lika stora, vertikala krafter P i noderna $3, 5, 7$ och 9. I övriga noder är lasterna noll. Bestäm samtliga stångkrafterna då $P = 10$, och bestäm därefter den maximala stångkraften samt i vilken stång den erhålls.

Bestäm det värde på P för vilket den maximala stångkraften blir 500. Lös ekvationssystemet för $P = 10(10)100$ och rita upp den maximala stångkraften som funktion av P

för att på så sätt approximativt bestämma P och diskutera sedan resultatet.

Härledning av ekvationerna: För varje fri nod erhålls två ekvationer, en för kraftjämvikt i horisontell led ($x-$led) och en för kraftjämvikt i vertikal led ($y-$led). Med den numrering av stänger och noder som anges i figuren får vi t.ex. för nod nr 5 med kraftjämvikt i $x-$led resp. $y-$led



$$\begin{aligned} f_{10}\cos(0) + \quad & f_9\cos(45) + f_7\cos(90) \\ + \quad & f_5\cos(135) + f_6\cos(180) \quad + P_{5x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{10}\sin(0) + \quad & f_9\sin(45) + f_7\sin(90) \\ + \quad & f_5\sin(135) + f_6\sin(180) \quad + P_{5y} = 0 \end{aligned}$$

Här står P_{5x} för den yttre lasten i x-led i nod nummer 5 (positiv åt höger), och P_{5y} för den yttre lasten i y-led i nod nummer 5 (positiv uppåt). I sammanställning över samtliga ekvationer ser vi att detta är ekvationerna 7 och 8. Vi har $b_7 = -P_{5x}$ och $b_8 = -P_{5y}$. Högerledet $\mathbf{b}$ beror endast av de yttre krafterna. Observera att i det aktuella lastfallet så är krafterna nedåtriktade.

På följande sidor listas ekvationerna för samtliga noder. Ni behöver inte kontrollera dem i detalj, utan acceptera ekvationssystemet som ett exempel på ett icke-trivialt linjärt ekvationssystem som Ni skulle kunna formulera själva om Ni hade tid och tålamod. För att kunna genomföra uppgifterna räcker det att Ni förstår så mycket av ekvationerna att Ni kan definiera hur en given yttre last ger en högerledsvektor $\mathbf{b}$.

Sätt $\alpha = \sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, och definiera stångkrafterna som positiva vid dragning. Kraftekvationen ger då följande jämviktsvillkor. Ekvationerna är uppställda från nod 2 till nod 10. För vardera av noderna 2–9 erhålls två ekvationer, och för nod 10 endast en.

$$\Sigma F_x = -\alpha f_1 + f_4 + \alpha f_5 + P_{2x} = 0 \tag{1.1}$$
$$\Sigma F_y = -\alpha f_1 - f_3 - \alpha f_5 + P_{2y} = 0 \tag{1.2}$$

$$\Sigma F_x = -f_2 + f_6 + P_{3x} = 0 \tag{1.3}$$
$$\Sigma F_y = f_3 + P_{3y} = 0 \tag{1.4}$$

$$\Sigma F_x = -f_4 + f_8 + P_{4x} = 0 \tag{1.5}$$
$$\Sigma F_y = -f_7 + P_{4y} = 0 \tag{1.6}$$

$$\Sigma F_x = -\alpha f_5 - f_6 + \alpha f_9 + f_{10} + P_{5x} = 0 \tag{1.7}$$
$$\Sigma F_y = \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 + P_{5y} = 0 \tag{1.8}$$

$$\Sigma F_x = -f_8 - \alpha f_9 + f_{12} + \alpha f_{13} + P_{6x} = 0 \tag{1.9}$$
$$\Sigma F_y = -\alpha f_9 - f_{11} - \alpha f_{13} + P_{6y} = 0 \tag{1.10}$$

$$\Sigma F_x = -f_{10} + f_{14} + P_{7x} = 0 \tag{1.11}$$
$$\Sigma F_y = f_{11} + P_{7y} = 0 \tag{1.12}$$

$$\Sigma F_x = -f_{12} + \alpha f_{16} + P_{8x} = 0 \tag{1.13}$$
$$\Sigma F_y = -f_{15} - \alpha f_{16} + P_{8y} = 0 \tag{1.14}$$

$$\Sigma F_x = -\alpha f_{13} - f_{14} + f_{17} + P_{9x} = 0 \tag{1.15}$$
$$\Sigma F_y = \alpha f_{13} + f_{15} + P_{9y} = 0 \tag{1.16}$$

$$\Sigma F_x = -\alpha f_{16} - f_{17} + P_{10x} = 0 \tag{1.17}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem

$$C\mathbf{F} = \mathbf{b}$$

för de obekanta krafterna $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_{17})^T$

Koefficientmatrisen och högerledet för lastfallet i figuren ovan finns i filen **fack.m**

```
a=sqrt(2)/2;

% Kolumnnummer
%   1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17
%                                                            rad nod led
A=[-a  0  0  1  a  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0        % 1  2   x
   -a  0 -1  0 -a  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0        % 2  2   y
    0 -1  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0        % 3  3   x
    0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0        % 4  3   y
    0  0  0 -1  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0        % 5  4   x
    0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0        % 6  4   y
    0  0  0  0 -a -1  0  0  a  1  0  0  0  0  0  0  0        % 7  5   x
    0  0  0  0  a  0  1  0  a  0  0  0  0  0  0  0  0        % 8  5   y
    0  0  0  0  0  0  0 -1 -a  0  0  1  a  0  0  0  0        % 9  6   x
    0  0  0  0  0  0  0  0 -a  0 -1  0 -a  0  0  0  0        %10  6   y
    0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  1  0  0  0        %11  7   x
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0        %12  7   y
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  0  0  0  a  0        %13  8   x
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -1  a  0           %14  8   y
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -a -1  0  0  1        %15  9   x
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  a  0  1  0  0        %16  9   y
    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 -a -1];      %17 10   x

%   1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17

b= [0  0  0 10  0  0  0 10  0  0  0 10  0  0  0 10  0]';
```

Observera användningen av kommentarer för att få en lättläst koefficientmatris. Allt som står efter %-tecknet på en rad är en kommentar, d.v.s. datorn hoppar över den texten.

Lösning: Lasterna i fackverket i fig 1 består av nedåtriktade, lika stora, vertikala krafter P i noderna 3, 5, 7 och 9. I övriga noder är lasterna noll. Då $P = 10$ erhålls högerledsvektorn enligt sista raden i **fack.m** Lösningen blir

```
>> fack
>> index=[1:17]';
>> [index A\b]

   ans =

       1.0000   -9.4281
       2.0000    6.6667
       3.0000   10.0000
       4.0000   -3.3333
       5.0000   -4.7140
       6.0000    6.6667
       7.0000         0
       8.0000   -3.3333
       9.0000   18.8562
      10.0000  -10.0000
      11.0000   10.0000
      12.0000   33.3333
      13.0000  -32.9983
      14.0000  -10.0000
      15.0000   33.3333
      16.0000   47.1405
      17.0000  -33.3333

>> maxkraft=max(abs(A\b))

maxkraft =

      47.1405
```

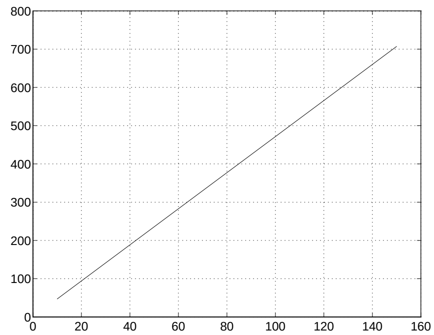
Den maximala stångkraften blir ca 47 och erhålls i stång nummer 16.

Om man vill kontrollera sin matris A så får hela matrisen inte rum på skärmen, men med hjälp av delmatris-noteringen (se Pärt 4.3) kan man lätt inspektera olika delar av matrisen:

```
>> A(:,1:2)

ans =

   -0.7071         0
   -0.7071         0
         0   -1.0000
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0
         0         0

>> A(12:17,16:17)

ans =

        0         0
    0.7071         0
    0.7071         0
         0    1.0000
         0         0
   -0.7071   -1.0000
```

Vi skall nu försöka bestämma för vilket värde på P, som den maximala stångkraften blir 500. Plotbilden skapas enligt (satserna finns i filen **fackplot.m**)

```
fack
p=[];
kraft=[];
b=b/10;
for P=10:10:150
  hl=b*P;
  x=A\hl;
  p=[p P];
  maxk=max(abs(x));
  kraft=[kraft maxk];
end
plot(p,kraft)
grid
```



Variabeln `maxk` är den maximala stångkraften för givet värde på P. Med `for`-slingan skapas 15 olika lastfall. Resultaten, d.v.s. P-värdena och motsvarande maximala krafter lagras i vektorerna `p` och `kraft` som sedan plottas. I figuren ser vi att maxkraften 500 erhålls för $P_{\max} \approx 110$.

Egentligen behöver vi inte göra några ytterligare datorberäkningar för att bestämma $P_{\max}$ då beräkningarna för $P = 10$ på föregående sida gjorts. Eftersom problemet är linjärt så gäller:

$$\text{Om } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ har lösningen } \mathbf{x}$$

så har

$$A\mathbf{y} = \alpha\mathbf{b} \text{ lösningen } \mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$$

Då vi löste problemet med $P = 10$ fick vi en lösning som vi kan kalla $\mathbf{z}$. Lösningen $\mathbf{y}$ för andra värden på P får vi då från $\mathbf{z}$ enligt $\mathbf{y} = \frac{P}{10} \times \mathbf{z}$. Den maximala komponenten av $\mathbf{y}$ är alltid komponent nummer 16 (pröva genom att i MATLAB bilda $\alpha \times \mathbf{z}$ om Du känner dig osäker), så vi behöver bara lösa den skalära ekvationen

$$y_{16} = \frac{P}{10} z_{16}$$

d.v.s.

$$500 = \frac{P}{10} 47.1405$$

Detta ger

$P_{\max} = 106.0659$, alltså

$P_{\max} = 106$

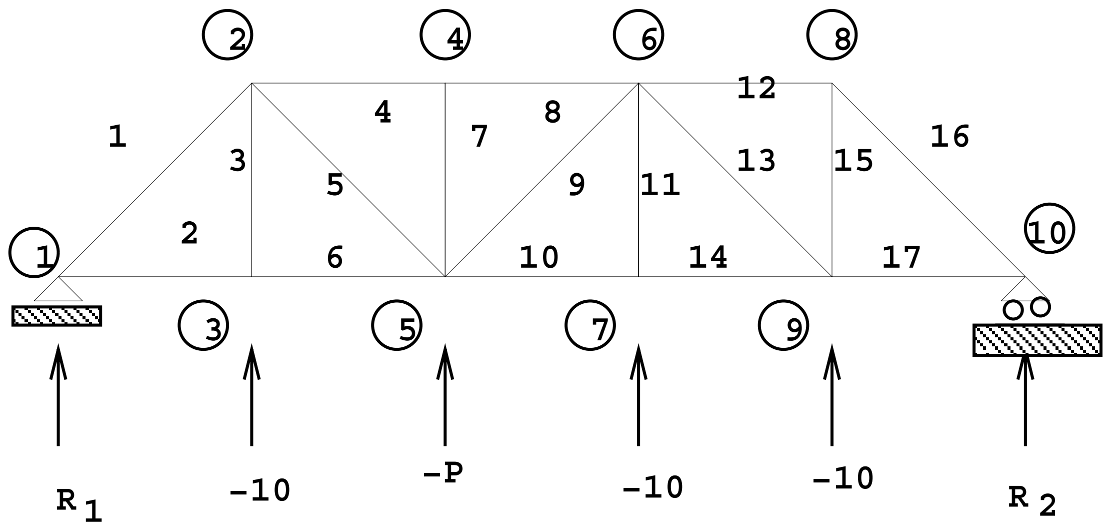
1.8 Insändningsuppgifter

1. Övningsuppgift 3.65 på sid 229 i Andersson. Redovisa dina MATLAB-satser och polynomets koefficienter. Rita två grafer; i den första ritar Du graferna för $f(x)$ och $p(x)$ för $-1 \leq x \leq 1$, och i den andra ritar du grafen för skillnaden $f(x) - p(x)$ för $-1 \leq x \leq 1$.

2. Övningsuppgift 3.68 på sid 230 i Andersson. Redovisa dina MATLAB-satser, samt problemets lösning.

3. Övningsuppgift 3.69 på sid 230 i Andersson. Redovisa dina MATLAB-satser, samt problemets lösning.

4. Studera återigen problemet i sektion 1.7.1 men låt lastfördelningen vara enligt nedanstående figur



Bestäm P så att maximala stångkraften blir 200.

(a) Pröva först med tabellering och plottning analogt med i 1.7.1. Observera att i detta lastfall så varieras endast lasten i nod 5. Varierar den maximala stångkraften linjärt med lasten P? Om så är fallet bör det vara möjligt att lösa uppgiften utan att lösa alla de ekvationssystem som vi löst för att plotta grafen. De återstående deluppgifterna syftar till att härleda ett alternativt, bättre sätt att lösa denna uppgift.

(b) Visa att högerledet $\mathbf{b}$ för godtyckligt P kan skrivas enligt

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{10} + (P - 10) \cdot \mathbf{e}_8$$

där $\mathbf{b}_{10}$ är den högerledsvektor som erhålls för $P = 10$, och $\mathbf{e}_8$ är den åttonde enhetsvektorn av dimension 17.

(c) Skriv, med hjälp av uppdelningen i b, lösningen till det linjära ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som en summa av två st vektorer $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}$, där dessa vektorer är lösningar till två olika linjära ekvationssystem med koefficientmatrisen A.

(d) Beskriv hur beräkningarna lämpligen organiseras, utför dem och bestäm på så sätt ett noggrant P sådant att maximala stångkraften blir 200.

Kapitel 1

Vektorer, matriser och linjära ekvationssystem

Facit till sektion 1.3.1

1. (Andersson ö 2.1 sid 167)
   Matlab-dialogen blir [1]

```
>> u=[2;1;3;0]
u =
     2
     1
     3
     0
>> v=[0;-1;1;2]
v =
     0
    -1
     1
     2
>> w=[2;1;1;0]
w =
     2
     1
     1
     0
```

   (a)
```
>> u+3*v

ans =

     2
    -2
     6
     6

>> w-u

ans =

     0
     0
    -2
     0
```

   (b)
```
>> u'*v

ans =

     2

>> u'*w

ans =

     8
```

(c) Vektorn $\mathbf{u}$ har längden $\sqrt{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \sqrt{2\times 2+1\times 1+3\times 3} = \sqrt{14}$ så de två normerade vektorer som är parallella med $\mathbf{u}$ är $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$.

(d)

```
>> v'*w

ans =

     0
```

2. (Andersson 2.5 sid 167) Riktningsvektorn mellan punkterna P och Q är

$$\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

Linjen kan skrivas

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

Med t.ex. $t = 2$ får vi punkten

$$\begin{pmatrix}6\\5\\-1\\0\end{pmatrix}$$

på linjen.

Facit till sektion 1.4.1

Facit till problemen på sid 14–15

1.
```
>> C=[7 4 2
      1 2 3
      1 2 4];
```

(a)
```
>> z=[30;25;60];
>> C*z

ans =

   430
   260
   320
```

(b)
```
>> C'

ans =

     7     1     1
     4     2     2
     2     3     4
```

(c)
```
>> v=[559;291;353];
>> z=C\v

z =

   45.0000
   30.0000
   62.0000
```

2.
```
>> D=[70 80 50
      50 90 60
      40 90 70];
```

(a)
```
>> x=D(:,1)

x =
```

```
      70
      50
      40

>> y=D(:,2)

y =
      80
      90
      90

>> z=D(:,3)

z =
      50
      60
      70
```

(b)
```
>> t=C*x; u=C*y; v=C*z;
>> F=[t u v]

F =

         770        1100         730
         290         530         380
         330         620         450
```

(c)
```
>> C*D

ans =

         770        1100         730
         290         530         380
         330         620         450
```

Facit till problemen på sid 20–21

1. (Andersson ö 2.6-2.9 sid 167-168)
   (a) (Andersson 2.6 sid 167) $a_{11} = 1$ $a_{23} = 7$ $a_{32} = 4$ $a_{12} = -1$.
   (b) (Andersson 2.7 sid 168) Kontrollera dina handräkningar med MATLAB.
   (c) (Andersson 2.8 sid 168) Matrisen på vänster sida blir
   $$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$
   så ekvationerna blir
   $$\begin{aligned} a &= 1 \\ a+b &= 3 \\ c &= 2 \\ c+d &= 5 \end{aligned}$$
   så lösningen blir $a = 1$, $b = 2$ $c = 2$ $d = 3$.

2. (Andersson 2.9 sid 168) Kontrollera dina handräkningar med MATLAB. Matriserna i a) och f) är symmetriska.

3. (Andersson 2.10 sid 168)

```
>> A=[1 3 0
      2 2 1
      3 1 0];
>> B=[-1 0 -1
      -2 1  1
       0 1  2];
```

(a)
```
>> c21=A(2,:)*B(:,1)

c21 =

    -6

>> c12=A(1,:)*B(:,2)
```

```
c12 =

     3

>> c33=A(3,:)*B(:,3)

c33 =

    -2
```

(b)

```
>> C=A*B

C =

    -7     3     2
    -6     3     2
    -5     1    -2
```

(c)

```
>> B*A

ans =

    -4    -4     0
     3    -3     1
     8     4     1
```

4. (Andersson 2.11 sid 168) Kontrollera dina handräkningar med MATLAB. Observera att de två beräkningarna i b) ger samma resultat.

5. (Andersson 2.13 sid 169) Vi kontrollerar några av produkterna i Matlab. Matriserna förutsätts inmatade före dessa kalkyler.

```
>> A*A
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions
 must agree.

>> A*B
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions
must agree.

>> B*A

ans =

     7    -1     8
    -1     5    -6
```

Följande produkter kan bildas: AD, BA, CA, CB, DC, DE, ED.

6. (Andersson 2.16 sid 169) Gör kontrollen i Matlab.

Facit till sektion 1.5.5

1. (Andersson ö 3.1 sid 215) Polynomet skrivs

$$P(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

Derivatan ges av

$$P'(x) = c_2 + 2c_3 x$$

Vi skall bestämma koefficienterna så de fyra villkoren $P(\pi) = \sin(\pi) = 0$, $P(2\pi) = \sin(2\pi) = 0$, $P'(\pi) = \cos(\pi) = -1$, $P'(2\pi) = \cos(2\pi) = 1$ uppfylls. Ekvationssystemet blir

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & \pi^2 \\ 1 & 2\pi & 4\pi^2 \\ 0 & 1 & 2\pi \\ 0 & 1 & 4\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi har fyra ekvationer för tre obekanta. Vi försöker lösa problemet i Matlab genom att tillfälligt stryka den sista ekvationen. Då får vi

```
>> A=[1   pi   pi^2
      1 2*pi 4*pi^2
      0   1  2*pi];
>> b=[0;0;-1];
>> c=A\b
c =
   6.28318530717959
  -3.00000000000000
   0.31830988618379
```

Slutligen kontrollerar vi om den lösning vi fått uppfyller den sista ekvationen.

```
>> c(2)+4*pi*c(3)
ans =
     1
```

Ja, det gjorde den!

2. (Andersson ö 3.2 sid 215) Vi betraktar sjö efter sjö. För sjön upptill till vänster i figuren rinner 12 enheter till sjön och x_A+x_B enheter från sjön. För denna sjö får vi då ekvationen

$$x_A + x_B = 12.$$

På motsvarande sätt gör vi för de övriga tre sjöarna. Det resulterande systemet finns i facit sid 471 i Andersson. Obs 3.2 skall stå högre upp på sidan. I Matlab får vi

```
>> B=[1 1  0  0
      0 1 -1  0
      0 0  1 -1
      1 0  0  1];
>> b=[12;10;-14;16];
>> B\b
Warning: Matrix is singular
 to working precision.

ans =

   Inf
   Inf
   Inf
   Inf
```

Vi får ingen lösning!

3. (Andersson ö 3.6 sid 217) Antag att totala uppdragsbeloppet (=summan av externa och interna uppdrag) för M är x_M kr, motsvarande för G och S. För M kan vi då teckna ekvationen

$$x_M = 20,000 + 0.5x_G + 0.1x_S$$

eller

$$x_M - 0.5x_G - 0.1x_S = 20,000$$

På samma sätt får vi för G och S

$$x_G = 40,000 + 0.2x_M + 0.6x_S$$

$$x_S = 20,000 + 0.1x_M + 0.25x_G$$

Efter omstuvning får vi ekvationssystemet

$$x_M - 0.5x_G - 0.1x_S = 20,000$$

$$-0.2x_M + x_G - 0.6x_S = 40,000$$

$$-0.1x_M - 0.25x_G + x_S = 20,000$$

vilket vi skriver med matris- och vektorbeteckningar enl.

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.1 \\ -0.2 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M \\ x_G \\ x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,000 \\ 40,000 \\ 20,000 \end{pmatrix}$$

(Andersson ö 3.20 sid 219, forts. av ovanstående problem) Med Matlab får vi lösningen

$$\begin{pmatrix} x_M \\ x_G \\ x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65,248 \\ 81,135 \\ 46,809 \end{pmatrix}$$

Nettointäkterna för M blir vad som återstår då G och S fått betalt för sina tjänster åt M, d.v.s. $x_M - 0.20x_M - 0.10x_M = 0.7x_M = 45,674$. På samma sätt får vi för G nettointäkten $x_G - 0.5x_G - 0.25x_G = 20,284$ och för S blir nettointäkten $x_S - 0.10x_S - 0.6x_S = 14,043$.

Facit till sektion 1.6.1

1. (Andersson ö 2.12 sid 169)

```
>> A=[2 -3; 4 1];
>> B=[6 -2; 2 5];
>> C=A*B;
>> C'

ans =

     6    26
   -19    -3

>> B'*A'

ans =

     6    26
   -19    -3
```

2. (Andersson ö 2.16 c sid 169)

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \mathbf{x}_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2x_2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3x_3 \end{pmatrix}$$

(Andersson ö 2.16 d sid 169)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3a_3 \end{pmatrix}$$

3. (Andersson ö 2.2 sid 167)

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})^T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

$$= (\mathbf{u}^T + \mathbf{v}^T)(\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

$$= \mathbf{u}^T\mathbf{u} + \mathbf{u}^T\mathbf{v} + \mathbf{v}^T\mathbf{u} + \mathbf{v}^T\mathbf{v}$$

$$= \mathbf{u}^T\mathbf{u} + \mathbf{v}^T\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$$

ty $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$ då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är otrogonala.