Labbrapport - Linjär algebra och geometri

Erik Gedeborg, ME,

Uppgift 3.65

Problem: Bestäm ett tredjegradspolynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ som har samma derivata som funktionen $f(x) = x^7$ i punkterna $x = 1$ och $x = -1$.

Lösning:

Givna funktioner:

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$f(x) = x^7$

Funktionerna deriveras enligt följande:

$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

$f'(x) = 7x^6$

Funktionsvärdena och värdena på derivatorna ska vara desamma för x = 1 och x = -1:

p(1) = f(1)

p(-1) = f(-1)

p'(1) = f'(-1)

p'(-1) = f'(-1)

Ovanstående ekvationer utvecklades och följande ekvationssystem erhölls:

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -1$

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 7$

$a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 7$

Detta ger en koefficientmatris A enligt:

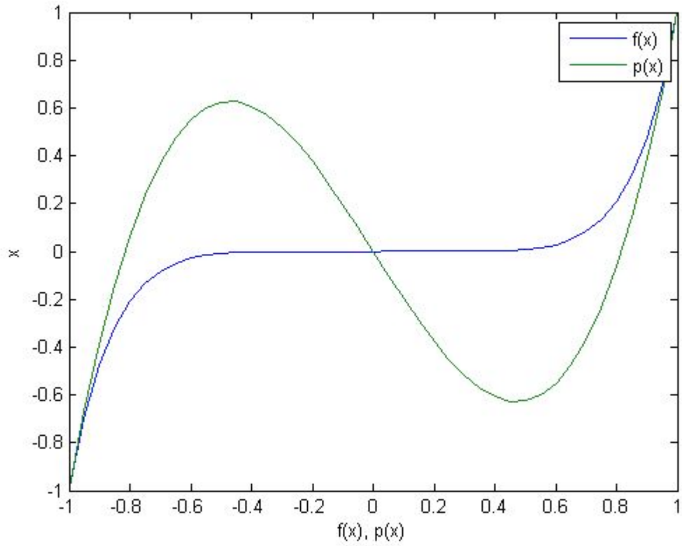
$$Aa = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

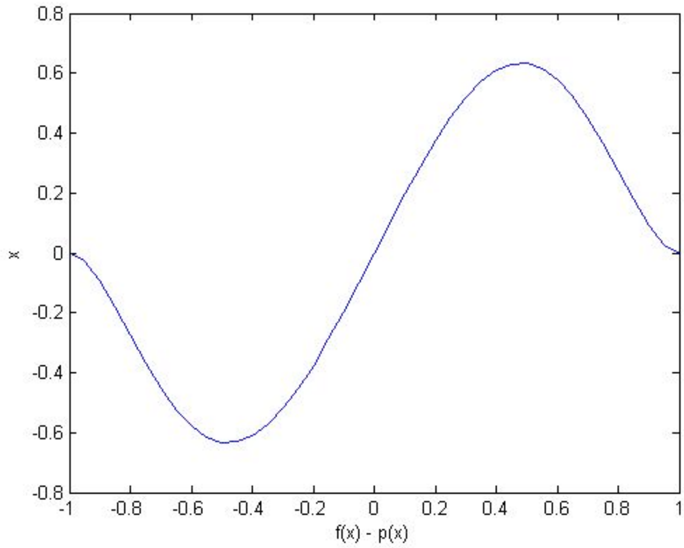
För att få fram vektorn **a**, d.v.s. a-värdena, utförs sedan ”matrisdivisionen” A**b** (alternativt multiplicera **b** med inversen av A, d.v.s. inv(A)***b**). Vi får då:

$a_0 = 0$ $a_1 = -2$ $a_2 = 0$ $a_3 = 3$

Det sökta tredjegradspolynomet $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = -2x + 3x^3$

Därefter tas ett antal x-värden fram mellan -1 och 1 med steglängden 0.05. Detta ritas sedan upp i två grafer där den första anger f(x) och p(x) och den andra differensen mellan dem. Se figurer nedan.





Uppgift 3.68

Problem: Ett företag i energibranschen förbrukar vid produktion av kol, bensin och elektrisk energi dessa energiformer enligt följande tabell:

	För att producera kol behövs	en enhet bensin behövs	elenergi behövs
enheter kol	0	0	1/10
enheter bensin	1/10	1/10	1/5
enheter elenergi	1/10	1/5	1/10

Bestäm hur mycket kol, bensin respektive elenergi företaget behöver för att till en kund kunna leverera 1350 enheter kol, 630 enheter bensin och 960 enheter elenergi.

Lösning:
Ursprungligen finns det 1 del (dvs. 100 %) att tillgå av kol, bensin och elenergi. Vi låter sedan en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ representera mängden kol, bensin respektive elenergi. Då kan vi använda en enhetsmatris I och skriva detta som

$$I * x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vid produktion av respektive energiform förbrukas en andel av den befintliga mängden. För att producera en enhet bensin behövs exempelvis 1/10 bensin och 1/5 elenergi (och 0 delar kol). Vi överför därmed den angivna tabellens värden till en andelsmatris A. Raderna i denna matris motsvarar alltså mängden kol, bensin respektive elenergi som krävs.

Förbrukningen innebär att den urpsrungliga mängden, dvs. I***x,** måste subtraheras med andelen som förbrukas vid produktionen, dvs. andelsmatrisen A. Den mängd som företaget vill kunna producera av de olika delarna låter vi anges av en vektor $\mathbf{b} = (1350, 630, 960)^t$. Vi får därmed ett ekvationssystem:

$$I * x - A * x = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (I - A) * x = \begin{pmatrix} 1350 \\ 630 \\ 960 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}}_{A} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1350 \\ 630 \\ 960 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \right)}_{I - A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1350 \\ 630 \\ 960 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Det återstår nu alltså att lösa ekvationssystemet och få ut vektorn **x** motsvarande mängden kol, bensin respektive elenergi som behövs för produktionen. Vi utför beräkningarna i Matlab genom att skapa en ny matris *C* = *I* - *A* (enhetsmatrisen *I* fås med hjälp av funktionen *eye*). Slutligen beräknas ”matrisdivisionen” C**b** i Matlab och tilldelas en ny vektor *x*.

Antalet enheter av de olika delarna som krävs för att producera 1350 enheter kol, 630 enheter bensin och 960 enheter elenergi:

Kol: 1500

Bensin: 1200

Elenergi: 1500

Uppgift 3.69

Problem: Ur ett recept till ”mormors smörringar” framgår att smör, socker, vetemjöl och skummjölkspulver används, men tyvärr utan dess proportioner. Det går dock att utläsa att 100 g deg innehåller 24,1 g fett, 55 g kolhydrater, 7,5 g protein och 500 kcal. Vidare är följande givet för 100 g av de aktuella ingredienserna:

	fett	kolhydrat	protein	kcal
smör	80	0	0	800
socker	0	100	0	400
vetemjöl	0	75	10	350
skummjölkspulver	1	50	35	400

Bestäm det recept som räcker till 500 g deg till ”mormors smörringar”.

Lösning:

Om vi låter de olika ingredienserna representeras av en vektor **x** = $(x_1, x_1, x_1, x_1)^t$ så kan vi skriva mängden fett, kolhydrater, proteiner och energimängd kcal som ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} fett = 24{,}1\,g \\ kolhydrat = 55\,g \\ protein = 7{,}5\,g \\ energi = 500\,kcal \end{cases}$$

d.v.s.

$$\begin{cases} 80x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 24{,}1 \\ 0x_1 + 100x_2 + 75x_3 + 50x_4 = 55 \\ 0x_1 + 0x_2 + 10x_3 + 35x_4 = 7{,}5 \\ 800x_1 + 400x_2 + 350x_3 + 400x_4 = 500 \end{cases}$$

Detta kan därmed skrivas som A**x** = **b** där matrisen A innehåller koefficienterna till **x**, dvs. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ och **b** = $(24{,}1,\ 55,\ 7{,}5,\ 500)^t$. Då fås nedanstående ekvationssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 100 & 75 & 50 \\ 0 & 0 & 10 & 35 \\ 800 & 400 & 350 & 400 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 24{,}1 \\ 55 \\ 7{,}5 \\ 500 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Vektorn **x** = (x1 x2 x3 x4)^t, andelarna (per gram deg) av de olika ingredienserna, fås ut genom ”matrisdivisionen” A**b** med hjälp av Matlab (samma resultat kan givetvis nås genom att själv utföra gausselimination).

Eftersom vektorn **x** anger de olika ingredienserna per gram deg, och vi önskar få ut den mängd av ingredienserna som räcker till 500 g deg, multipliceras slutligen **x** med 500. Resultatet ses nedan:

Mormors smörringar (500 gram deg ≈ 60 kakor)

150 g smör

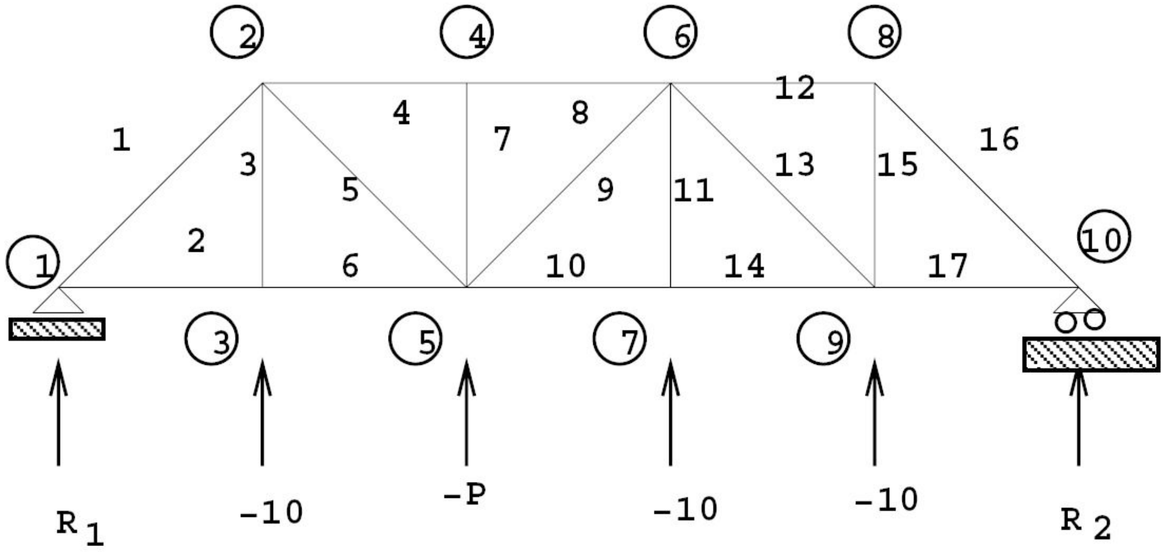
100 g socker

200 g vetemjöl

50 g skummjölkspulver

Uppgift 4: Plant fackverk

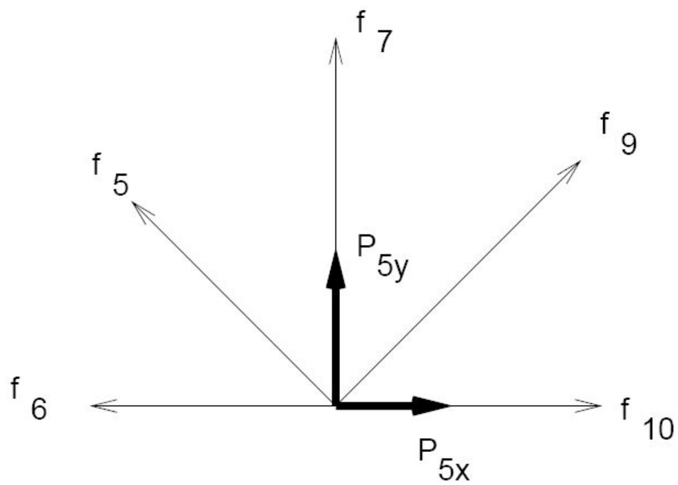
För ett plant fackverk enligt nedanstående figur, gäller att stångkrafterna kan beskrivas av ett linjärt ekvationssystem A**f** = **b**.



I fackverket finns laster i noderna 3, 5, 7 och 9. I noderna 3, 7 och 9 är lasten statisk medan den i nod 5 är varierbar. I övriga noder är lasten noll.

Kraftfördelningen i fackverket härleds nedan.

I varje fri nod råder kraftjämvikt. Denna kan sedan delas upp i två ekvationer, en för horisontellt led (x-led) och en för vertikalt led (y-led). Med en numrering av stänger och noder enligt ovanstående figur fås för exempelvis nod 5 en kraftjämvikt enligt



Ekvationerna för de krafter som påverkar nod 5:

x-led: $f_{10}\cos(0°)+f_9\cos(45°)+f_7\cos(90°)+f_5\cos(135°)+f_6\cos(180°)+P_{5x}=0$

y-led: $f_{10}\sin(0°)+f_9\sin(45°)+f_7\sin(90°)+f_5\sin(135°)+f_6\sin(180°)-P_{5y}=0$

Den yttre lasten på noden i x-led och y-led betecknas av P_{5x} respektive P_{5y}. Vid sammanställning över samtliga ekvationer framgår att detta är ekvationerna 7 och 8. Således, eftersom högerledet **b** i ekvationssystemet A**f** = **b** endast beror av den yttre lasten, fås att $b_7=-P_{5x}$ och $b_8=-P_{5y}$. På liknande sätt fås ekvationerna för de övriga noderna.

Om $\alpha=\sin(45°)=\cos(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, och de två ekvationer som hör till vardera av noderna 2-9 samt den enda ekvationen för nod 10 tas fram, fås följande ekvationssystem:

	Ekv.	Nod
$\sum F_x=-\alpha f_1+f_4+\alpha f_5+P_{2x}=0$	1	2
$\sum F_y=-\alpha f_1-f_3-\alpha f_5+P_{2y}=0$	2	2
$\sum F_x=-f_2+f_6+P_{3x}=0$	3	3
$\sum F_y=f_3-P_{3y}=0$	4	3
$\sum F_x=-f_4+f_8+P_{4x}=0$	5	4
$\sum F_y=-f_7+P_{4y}=0$	6	4
$\sum F_x=-\alpha f_5-f_6+\alpha f_9+f_{10}+P_{5x}=0$	7	5
$\sum F_y=\alpha f_5+f_7+\alpha f_9-P_{5y}=0$	8	5
$\sum F_x=-f_8-\alpha f_9+f_{12}+\alpha f_{13}+P_{6x}=0$	9	6
$\sum F_y=-\alpha f_9-f_{11}-\alpha f_{13}+P_{6y}=0$	10	6
$\sum F_x=-f_{10}+f_{14}+P_{7x}=0$	11	7
$\sum F_y=f_{11}-P_{7y}=0$	12	7
$\sum F_x=-f_{12}+\alpha f_{16}+P_{8x}=0$	13	8
$\sum F_y=-f_{15}-\alpha f_{16}+P_{8y}=0$	14	8
$\sum F_x=-\alpha f_{13}-f_{14}+f_{17}+P_{9x}=0$	15	9
$\sum F_y=\alpha f_{13}+f_{15}-P_{9y}=0$	16	9
$\sum F_x=-\alpha f_{16}-f_{17}+P_{10x}=0$	17	10

I det givna lastfallet är lasterna endast riktade rakt nedåt (y-led), vilket ger att $P_{3y} = P_{7y} = P_{9y} = 10$, P_{5y} varierbar, och övriga P noll.

Ekvationerna ovan är ett linjärt ekvationssystem A**F** = **b** för de okända krafterna F = $(f_1, f_2, \ldots, f_{17})^t$.

Följande uppgifter syftar till att bestämma motsvarande last P så att den maximala stångkraften blir 200.

Uppgift 4a

Problem: Använd tabellering och plottning för att bestämma värdet på P, och studera om den maximala stångkraften varierar linjärt med lasten P.

Lösning:

Tabellering och plottning

Följande algoritm beräknar maximala stångkraften för ökande last P (i nod 5):

```
p = [];
kraft = [];
imax =  [];
for P = 10:10:200
    hl = b10;
    hl(8) = P;
    x = A\hl;
    p = [p P];
    [maxk, imaxk] = max (abs (x));
    kraft = [kraft maxk];
    imax = [imax imaxk];
end
```

I koden ses en for-slinga ökar värdet på *P* från 10 till 200 (med intervallet) och att det åttonde elementet (som svarar mot nod 5) i högerledsvektorn *hl*, tilldelats värdet på *P*. Maximal stångkraft har sedan tagits ut genom funktionen *max()* och lagts i variabeln *maxk*.

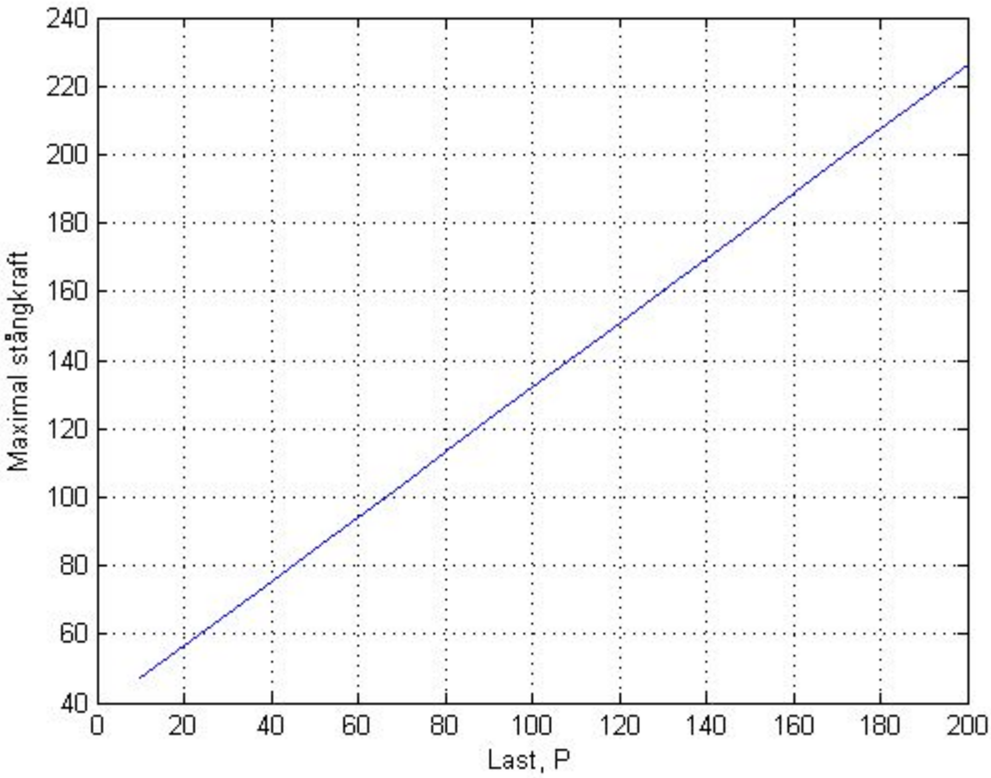
Linjär kurvanpassning (Minstakvadratmetoden)

```
p_ny = [10 150];
hl_ny = b10;
tmp1 = max (abs (A\hl_ny));
hl_ny(8) = p_ny(2);
```

```
tmp2 = max (abs (A\hl_ny));
kraft_ny = [tmp1 tmp2];
k = polyfit (p_ny, kraft_ny, 1);
pval = 10:10:200;
kraftval = k(1)*pval + k(2);
```

Här använder vi minstakvadratmetoden genom att använda funktionen polyfit. Vi får därmed ut de två koefficienterna till den linjära kurvan. I *kraftval* får vi följaktligen ut ett antal nya värden som vi plottar mot värdena i *pval*.

Vid plottning av maximala stångkraften mot lasten ses att grafen blir ekvivalent för de båda metoderna:



Ur figuren kan läsas att vid maximala stångkraften 200 är lasten P ≈170.

Ett mer exakt värde på P är enkelt att härleda fram ur *kraftval*, eller helt enkelt interpolera fram värdet (med hjälp av funktionen *interp1*).

Uppgift 4b

Problem: Visa att högerledsvektorn **b** kan skrivas som **b** = $\mathbf{b}_{10}$ + (P - 10)*$\mathbf{e}_8$ där $\mathbf{b}_{10}$ är den högerledsvektor som erhålls för $P = 10$, och $\mathbf{e}_8$ är den åttonde enhetsvektorn av dimension 17.

Lösning:
Den nedåtriktade lasten P förekommer endast i nod nummer 5; övriga noder har vardera lasten 10 (riktade nedåt). De kraftekvationer som påverkas av lasten P är därför endast de två som hör till nod nummer 5. Dessa är som följer:

Summa krafter i x-led = 0:

$$-\alpha f_5 - f_6 + \alpha f_9 + f_{10} = 0$$

Summa krafter i y-led = 0:

$$\alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 - P = 0$$

d.v.s.

$$\alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 = P$$

där $\alpha = \sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Eftersom lasterna i uppgiften alla är enbart riktade nedåt, är det endast kraftekvationen i y-led som beror av P. I det ekvationssystem A*$\mathbf{x}$ = $\mathbf{b}_{10}$ som beskriver kraftsituationen med alla laster lika med 10 (nedåtriktade), finns ekvationen i y-led för nod nummer 5 i rad 8. Önskar man beskriva den nya kraftsituationen, i vilken lasten för nod nummer 5 "ändrats" till P (nedåtriktad last), uttryckt med det "gamla" systemets beteckningar, måste den åttonde ekvationen (rad 8) ändras, medan övriga ekvationer (övriga rader) lämnas oförändrade.

Eftersom enhetsvektorn $\mathbf{e}_8$ har nollor i alla komponenter utom just i den åttonde, kan man således skriva det "nya" högerledet (det enda som ändras) enligt

b = $\mathbf{b}_{10}$ + (P - 10)*$\mathbf{e}_8$

där $\mathbf{b}_{10}$ är högerledsvektorn hörande till det "gamla" systemet (alla laster lika med 10). Om händelsevis P = 10, blir **b** = $\mathbf{b}_{10}$ (samma **b** som i det "gamla" systemet). Om t.ex. P = 50, blir **b** = $\mathbf{b}_{10}$ + 40*$\mathbf{e}_8$, men eftersom $\mathbf{e}_8$ har alla komponenter noll utom den åttonde, påverkas endast den åttonde ekvationen i systemet A*$\mathbf{x}$ = **b**, såsom önskas. Formeln för **b** beskriver alltså det "nya" högerledet fullständigt. V.S.V.

Uppgift 4c

Problem: Skriv lösningen till det linjära ekvationssystemet A***x** = **b** som en summa av två stycken vektorer y och z, där dessa vektorer är lösningar till två olika linjära ekvationssystem med koefficientmatrisen A.

Lösning:
Betrakta ekvationssystemet A***x** = **b**. Skriv

$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{10} + (P - 10)*\mathbf{e}_8$

och låt **x** = **y** + **z** samt $\mathbf{b} = \mathbf{b}_y + \mathbf{b}_z$. Välj t.ex.

$\mathbf{b}_y = \mathbf{b}_{10}$

$\mathbf{b}_z = (P - 10)*\mathbf{e}_8$

Lösningen **x** till A***x** = **b** fås då som summan av lösningarna **y** och **z** till systemen

$A*\mathbf{y} = \mathbf{b}_y$

$A*\mathbf{z} = \mathbf{b}_z$

ty $A*\mathbf{x} = A*(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = A*\mathbf{y} + A*\mathbf{z} = \mathbf{b}_y + \mathbf{b}_z = \mathbf{b}_{10} + (P - 10)*\mathbf{e}_8 = \mathbf{b}$.

Uppgift 4d

Problem: Beskriv hur beräkningarna lämpligen organiseras, utför dem och bestäm på så sätt ett noggrant *P* sådant att maximala stångkraften blir 200.

Lösning:
For-slingan i uppgift 4a lagrade, förutom de maximala stångkrafterna vid variation av P, även de index för vilka maxima rådde. Varje index är också numret på en stång (1 t.o.m. 17).

Noterbart är att den maximala stångkraften tydligen alltid inträffar på stång nummer 16. För bestämmandet av P kan linjäriteten i problemet med fördel utnyttjas:

Låt $\mathbf{z}_z$ vara lösningen till

$A* \mathbf{z}_z = \mathbf{e}_8$

Det gäller då att $\mathbf{z} = (P - 10)*\mathbf{z}_z$ är lösningen till

$A*\mathbf{z} = (P - 10)*\mathbf{e}_8$

Om alltså, enligt vad som togs fram i uppgift 4c,

$A*\mathbf{x} = A*(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = A*\mathbf{y} + A*\mathbf{z} = \mathbf{b}_{10} + (P - 10)*\mathbf{e}_8$

$A*\mathbf{y} = \mathbf{b}_{10}$

$A*\mathbf{z} = (P - 10)*\mathbf{e}_8$

kombineras med det nyss sagda, gäller att

$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{y} + (P - 10)*\mathbf{z}_z$

är lösningen till det fullständiga ekvationssystemet $A*\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Eftersom maximum för stångkraften alltid hamnar i stång nummer 16, iakttas endast den ekvation som svarar mot just denna stång, vid beräkningen av P. Huvudekvationen i fråga är den sextonde, innefattande dels rad nummer 16 i A, dels $\mathbf{x}$, d.v.s. $\mathbf{y} + (P - 10)*\mathbf{z}_z$, dels den sextonde komponenten i $\mathbf{b}$, d.v.s. sextonde komponenten i b10 + $(P - 10)*\mathbf{e}_8$. För stång nummer 16 måste alltså följaktligen gälla

$A[16, :]*(\mathbf{y} + (P - 10)*\mathbf{z}_z) = \mathbf{b}_{10}[16] + (P - 10)*\mathbf{e}_8[16]$

där [] anger indexering. Den sista termen i högerledet blir noll, eftersom enhetsvektorn $\mathbf{e}_8$ har sin enda nollskilda komponent på index 8. Kvar blir:

$A[16, :]*(\mathbf{y} + (P - 10)* \mathbf{z}_z) = \mathbf{b}_{10}[16]$

Notera att både A[16, :], $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}_z$ är vektorer av dimension 17, medan P och $\mathbf{b}_{10}[16]$ skalärer. (A[16, :] en radvektor, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{z}_z$ kolumnvektorer.). För den sökta lösningen har ställts kravet att den maximala stångkraften får vara högst 200, d.v.s.

$\mathbf{x} = \mathbf{y} + (P - 10)*\mathbf{z}_z$

med villkoret att ingen komponent i x får vara större än 200. Enligt vad som tidigare förklarats, är den största komponenten alltid på index 16. Ekvationen som återstår att lösa blir sålunda en skalär sådan:

$\mathbf{x}[16] = 200 = \mathbf{y}[16] + (P - 10)*\mathbf{z}_z[16]$

varefter P nu enkelt kan lösas ut, vilket resulterar i följade uttryck för P:

$P = (200 - \mathbf{y}[16]) / \mathbf{z}_z[16] + 10$

För maximal stångkraft 200 fås därmed ett noggrant värde på lasten P: 172.132034