KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 2 i 5B1146 för IT & ME
24 november 2006, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.
* OBS!! Rätten att klaga på kontrollskrivningarna upphör när skrivningen lämnar undervisningslokalen.

1. Vad är villkoret på talet a för att systemet
$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + az = 2 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$
skall ha exakt en lösning?

2. Undersök om vektorn $(5,1,5,7)^t$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1,2,1,2)^t$ och $(1,-1,1,1)^t$.

3. Antag att A och B är inverterbara matriser med inverserna A^{-1} resp B^{-1}. Bestäm den matris X som uppfyller $AXB = AB + B^2$

KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 2 i 5B1146 för IT & ME
24 november 2006, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

* OBS!! Rätten att klaga på kontrollskrivningarna upphör när skrivningen lämnar undervisningslokalen.

1. Vad är villkoret på talet a för att systemet

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 3x+y+az=1 \\ 3x+y+11z=3 \end{cases}$$

skall ha exakt en lösning?

2. Undersök om vektorn $(5,7,1,5)^t$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1,1,-1,1)^t$ och $(1,2,2,1)^t$.

3. Antag att A och B är inverterbara matriser med inverserna A^{-1} resp B^{-1}. Bestäm den matris X som uppfyller $BXA = BA + A^2$

Lösningsförslag till KS2

Vänster

1. (Se sid 282) Vi skriver den givna ekvationssystem på matris form

$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Då gäller att ekvations systemet har exakat en lösning

om $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ =[sedvanliga metod ger]= $a - 1 \neq 0$

Svar; ekvations systemet har exakat en lösning om $a \neq 1$

---

2. (Se ex 5.11 sid 279). Vi undersöker om det finns konstanter a och b sådana att $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$.

$a(1,-1,1,1) + b(1,2,1,2) = (5,1,5,7) \Leftrightarrow (a + b, -a + 2b, a + b, a + 2b) = (5,1,5,7) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 5 & \\ -a + 2b = 1 & e_2 + e_1 \\ a + b = 5 & e_3 - e_1 \\ a + 2b = 7 & e_4 - e_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 3b = 6 \\ 0 = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3,\ b = 2.$$

Svar: ja.

---

3. (Se ex 6.8 sid 312). $AXB = AB + B^2$ multipliceras från vänster med A^{-1} och får $A^{-1}AXB = A^{-1}AB + A^{-1}B^2 \Leftrightarrow XB = B + A^{-1}B^2$ som multipliceras från höger med B^{-1} och får $XBB^{-1} = BB^{-1} + A^{-1}BBB^{-1} \Leftrightarrow X = I + A^{-1}B$

svar $X = I + A^{-1}B$

Höger

1. (Se sid 282) Vi skriver den givna ekvationssystem på matris form

$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & a \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Då gäller att ekvations systemet har exakat en lösning

om $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & a \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =[sedvanliga metod ger]= $1 - a \neq 0$

Svar: Ekvations systemet har exakat en lösning om $a \neq 1$

---

2. . (Se ex 5.11 sid 279Vi undersöker om det finns konstanter a och b sådana att $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$.

$a(1,1,-1,1) + b(1,2,2,1) = (5,7,1,5) \Leftrightarrow (a + b, a + 2b, -a + 2b, a + b) = (5,7,1,5) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 5 & \\ a + 2b = 7 & e_2 - e_1 \\ -a + 2b = 1 & e_3 + e_1 \\ a + b = 5 & e_4 - e_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ b = 2 \\ 3b = 6 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3,\ b = 2.$$

Svar: ja.

3.(t.ex se kursboken ex 6.8 sid 312) $BXA = BA + A^2$ multipliceras från vänster med B^{-1} och får $B^{-1}BXA = B^{-1}BA + B^{-1}A^2 \Leftrightarrow XA = A + B^{-1}A^2$ som multipliceras från höger med A^{-1} och får $XAA^{-1} = AA^{-1} + B^{-1}AAA^{-1} \Leftrightarrow X = I + B^{-1}A$

svar $X = I + B^{-1}A$