KTH Matematik
kontrollskrivning nr 3 i 5B1146 för IT & ME
8 december 2006, kl 13.15-14.15

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. I $\mathbb{R}^2$ med basvektorer $\{e_1, e_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna $(2,1)$ respektive $(5,2)$ som nya basvektorer $\{f_1, f_2\}$.
a. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den vektor v som i det nya systemet har koordinaterna (1,1)?
b. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x + 2y = 3$?

2. Skriv $\dfrac{(\sqrt{3} + i)^5}{1 + i\sqrt{3}}$ på formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Svaret får inte innehålla trigonometriska uttryck.

3. Undersök om matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ kan diagonaliseras.

KTH Matematik
kontrollskrivning nr 3 i 5B1146 för IT & ME
8 december 2006, kl 13.15-14.15

Version höger.
Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. I $\mathbb{R}^2$ med basvektorer $\{e_1, e_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna $(3,2)$ respektive $(5,3)$ som nya basvektorer $\{f_1, f_2\}$.
a. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den v vektor som i det nya systemet har koordinaterna (1,3)?
b. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $2x - y = 1$

2. Skriv $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{\sqrt{3}+i}$ på formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Svaret får inte innehålla trigonometriska uttryck.

3. Undersök om matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kan diagonaliseras.

Lösningsförslag till KS3
Vänster.

1. Basbytematrisen är $P=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Om en vektor $\mathbf{x}=(x,y)$ i gamla basen e och samma vektor $\mathbf{x}=(u,v)$ i den nya basen f så ges sambandet mellan (x,y) och (u,v) via

$$(*)\quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2u+5v\\ y=u+2v\end{cases}$$

a) $(*)\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 3\end{pmatrix}$

b) $x+2y=3=\left[(*)\Rightarrow\begin{cases}x=2u+5v\\ y=u+2v\end{cases}\right]=4u+9v=3$

2. Vi har $\sqrt{3}+i=2(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)$ och $1+i\sqrt{3}=2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)$. de Moivres sats ger

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2^5(\cos 5\pi/6+i\sin 5\pi/6)}{2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)}=2^4(\cos(5\pi/6-\pi/3)+i\sin(5\pi/6-\pi/3))=16i.$$

$\boxed{\text{Svar: } 16i.}$

3. En matris (nxn)-A kan diagonaliseras om A har n stycken linjärt oberoende egenvektorer

Dvs vi undersöker om $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ har två icke parallella egenvektorer.

Egenvärden ges av $\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$

Motsvarande egenvektorer ges

av $(A-2I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2 & 0\\ 1 & 2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\text{godtycklig t.ex=1}\end{cases}$

Vi får $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Detta en linje som går genom origo med riktningsvektor $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Vi behöver två icke parallella egenvektorer för att kunna diagonalisera matrisen A . Vi har endast en egenvektor

Svar nej

Höger

1. Basbytematrisen är $P=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Om en vektor $\mathbf{x}=(x,y)$ i gamla basen e och samma vektor $\mathbf{x}=(u,v)$ i den nya basen f så ges sambandet mellan (x,y) och (u,v) via

$$(**)\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3u+5v\\ y=2u+3v\end{cases}$$

a) $(**)\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\ 11\end{pmatrix}$

b) $2x-y=1=\left[(**)\Rightarrow\begin{cases}x=3u+5v\\ y=2u+3v\end{cases}\right]=4u+7v=1$

2.Vi har $1+i\sqrt{3}=2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)$ och $\sqrt{3}+i=2(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)$. de Moivres sats ger $\dfrac{(1+i\sqrt{3})5}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{25(\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3)}{2(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)}=24(\cos(5\pi/3-\pi/6)+i\sin(5\pi/3-\pi/6))=-16i.$

$\boxed{\text{Svar: } -16i.}$

3. En matris (nxn)-A kan diagonaliseras om A har n stycken linjärt oberoende egenvektorer

Dvs vi undersöker om $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ har två icke parallella egenvektorer.

Egenvärden ges av $\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1$

Motsvarande egenvektorer ges

av $(A-1I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & 0\\ 1 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\text{godtycklig t.ex=1}\end{cases}$

Vi får $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Detta en linje som går genom origo med riktningsvektor $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Vi behöver två icke parallella egenvektorer för att kunna diagonalisera matrisen A . Vi har endast en egenvektor

Svar nej