KTH matematik

Repetitions inför tentamen i 5b1146

1. a. En låda har formen av en sned parallellepiped med kanterna representerade av vektorerna $\boldsymbol{u} = (2,1,1)$, $\boldsymbol{v} = (1,1,2)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1)$. Beräkna lådans volym. (1p)

   b. Undersök om vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \infty \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ ligger i samma plan. (2p)

2. För vilka värden på konstanter a, b och c har ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 3a + b + c \\ bx + 2y + z = a + 3b + 2c \\ cx + y + z = a + b + 2c \end{cases}$$

precis en lösning $x = 1$, $y = 1$ och $z = 1$? (4p)

3. Lös ekvationen $z^2 - (2 + 3\mathrm{i})z - 1 + 3\mathrm{i} = 0$. (3p)

4. Ekvationen $z^3 + z + 10 = 0$ har en rot $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^4} + \dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

   a. Skriv denna rot på formen $a + b\mathrm{i}$ där a och b är reella tal. (2p)

   b. Bestäm samtliga rötter. (2p)

5. Bestäm alla lösningar till matrisekvationen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. (3p)

6. En rät linje går genom punkten $p = (1,2,3)$ och är parallell med de båda planen $x - 2y + z = 1$ och $2x + 2y - 3z = 2$. Ange linjens ekvation på parameterform. (2p)

7. Bestäm projektionen av vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,3)$ på planet $2x + y - z = 0$. (3p)

v.g.v

8. En linjär avbildning A: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ bestäms av matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

a. Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{u}$ sådana att $A(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$. (2p)

b. Bestäm värdemängden av A (3p)

9. Visa att ekvationen $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 4x - 3y + 5 = 0$ i xy–planet beskriver en parabel. I vilket koordinatsystem får denna parabel ekvationen $u = 5v^2$? (4p)

10. Matrisen A har egenvärden 1 och 2 med motsvarande egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Bestäm A. (3p)

Ledning: Matrisen A kan diagonaliseras.

11. Visa med hjälp av induktion att $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ är jämnt delbart med 7. (3p)

Lösningsförslag till repetitions tal

1a. Volymen ges av $V = \pm\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$ **Svar:** 4.

1b. Vi har $\boldsymbol{u} \infty \boldsymbol{v} = (1,-3,1)$ och $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ □

Svar: Vektorerna ligger inte i samma plan.

---

2. Ekvationssystemet (i obekanta x, y och z) $\begin{cases} ax + y + 2z = 3a + b + c \\ bx + 2y + z = a + 3b + 2c \\ cx + y + z = a + b + 2c \end{cases}$ har precis en lösning

□ $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + b - 3c \neq 0$. För $x = 1$, $y = 1$ och $z = 1$ fås $\begin{cases} 2a + b + c = 3 \\ a + 2b + 2c = 3 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$ och med hjälp

av Gausselimination får vi $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} r_1 - r_3 \\ r_2 - 2r_1 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} r_1 - r_3 \\ \\ r_3 - r_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, alltså $a = 1$

och $b = 1 - c$. Detta insatt i $a + b - 3c \neq 0$ ger $c \neq \frac{1}{2}$. **Svar:** $a = 1$, $b = 1 - c$, $c \neq \frac{1}{2}$.

---

3. Man har $z^2 - (2 + 3\mathrm{i})z - 1 + 3\mathrm{i} = \left(z - 1 - \frac{3\mathrm{i}}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{3\mathrm{i}}{2}\right)^2 - 1 + 3\mathrm{i} = \left(z - 1 - \frac{3\mathrm{i}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$

vilket

ger $z - 1 - \frac{3\mathrm{i}}{2} = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}$ och **Svar:** $z = 1 + 2\mathrm{i}$ och $z = 1 + \mathrm{i}$.

---

4. Vi har $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ och $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right)$ vilket ger

$(1 + \mathrm{i})^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ och $(1 - \mathrm{i})^4 = 4\left(\cos\frac{-4\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-4\pi}{4}\right)$ samt

$\frac{(1 + \mathrm{i})^5}{(1 - \mathrm{i})^4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{4}\right) = 1 + \mathrm{i}.$

Dessutom är $\frac{2 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = \frac{(2 + \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} = \frac{5\mathrm{i}}{5} = \mathrm{i}$ alltså en rot är $z = \frac{(1 + \mathrm{i})^5}{(1 - \mathrm{i})^4} + \frac{2 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = 1 + 2\mathrm{i}$.

Eftersom alla koefficienter i ekvationen är reella så är även $z = 1 - 2\mathrm{i}$ en rot till ekvationen. Detta medför att polynomet $z^3 + z + 10$ är jämnt delbart med $(z - 1 - 2\mathrm{i})(z - 1 + 2\mathrm{i}) = z^2 - 2z + 5$. Divisionen ger $z^3 + z + 10 = (z^2 - 2z + 5)(z + 2)$, vilket innebär att den tredje roten är $z = -2$. **Svar:** $z = 1 + 2\mathrm{i}$, $z = 1 - 2\mathrm{i}$ och $z = -2$.

---

5. Eftersom $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ så är matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ inverterbar. Man får att dess invers

är $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ så att $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **Svar:** $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

---

6. Planens normalvektorer är $\boldsymbol{u} = (1,-2,1)$ respektive $\boldsymbol{v} = (2,2,-3)$. Linjens riktning ges av vektorn $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} \infty \boldsymbol{v} = (4,5,6)$ och linjens ekvation är $\boldsymbol{p}(t) = (1 + 4t,\ 2 + 5t,\ 3 + 6t)$.

Svar: $\boldsymbol{p}(t) = (1 + 4t,\ 2 + 5t,\ 3 + 6t)$.

---

7. Planets normalvektor är $\boldsymbol{v} = (2,1,-1)$. Vid projektionen av $\boldsymbol{u} = (1,2,3)$ på $\boldsymbol{v}$ fås vektorn

$\boldsymbol{w} = \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\ \boldsymbol{v} = \dfrac{1}{6}(2,1,-1)$ vilket innebär att projektionen av $\boldsymbol{u}$ på planet är vektorn $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} =$

$= \dfrac{1}{6}(4,11,19)$.

Svar: $\dfrac{1}{6}(4,11,19)$.

8a. Låt $\boldsymbol{u} = (x,y,z)$. $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ innebär att $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ dvs $\begin{cases}x+2y+3z=0\\2x+\ y+\ z=0\\3x+3y+4z=0\end{cases}$. Med hjälp av Gausselimination fås

$$\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&1&1&0\\3&3&4&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\r_2-2r_1\\r_3-3r_1\end{matrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-3&-5&0\\0&-3&-5&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\r_3-r_2\end{matrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-3&-5&0\end{bmatrix}3r_1+2r_2\quad\begin{bmatrix}3&0&-1&0\\0&-3&-5&0\end{bmatrix}$$ alltså

$x = t$, $z = 3t$ och $y = -5x$.

Svar: $\boldsymbol{u} = (t,-5t,3t)$.

8b. $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$ tillhör värdemängden av T om det finns (x,y,z) sådan att $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

dvs $\begin{cases}x+2y+3z=a\\2x+\ y+\ z=b\\3x+3y+4z=c\end{cases}$. Med hjälp av Gausselimination fås

$$\begin{bmatrix}1&2&3&a\\2&1&1&b\\3&3&4&c\end{bmatrix}\begin{matrix}\\r_2-2r_1\\r_3-3r_1\end{matrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&a\\0&-3&-5&b-2a\\0&-3&-5&c-3a\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\r_3-r_2\end{matrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&a\\0&-3&-5&b-2a\\0&0&0&c-b-a\end{bmatrix}$$ vilket innebär att

Svar: Värdemängden av T består av alla vektorer $\boldsymbol{v} = (a,b,c)$ för vilka $a + b - c = 0$.

---

9. Ekvationen kan skrivas på formen $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} + K\boldsymbol{x} + 5 = 0$ där $A = \begin{bmatrix}9&-12\\-12&16\end{bmatrix}$ och $K = [-4\ \ -3]$.

Ur ekvationen $\begin{vmatrix}9-\lambda&-12\\-12&16-\lambda\end{vmatrix} = 0$ får man egenvärdena till A: $\lambda = 0$ och $\lambda = 25$.

Motsvarande egenvektorer fås ur ekvationen $\begin{bmatrix}9-\lambda&-12\\-12&16-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

För $\lambda = 0$ fås $\begin{bmatrix}9x-12y\\-12x+16y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ och en lösning är $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$, vilken normeras: $\begin{bmatrix}4/5\\3/5\end{bmatrix}$.

För $\lambda = 25$ fås $\begin{bmatrix}-16x-12y\\-12x-9y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ och en lösning är $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$, vilken normeras: $\begin{bmatrix}-3/5\\4/5\end{bmatrix}$.

Vid substitutionen $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/5&-3/5\\3/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ (motsvarar en rotation, ty $\begin{vmatrix}4/5&-3/5\\3/5&4/5\end{vmatrix} = 1$) övergår den givna ekvationen på ekvationen $25v^2 + [-4\ \ -3]\begin{bmatrix}4/5&-3/5\\3/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} + 5 = 0$, dvs $5v^2 - u + 1 = 0$ vilket i uv–planet beskriver en parabel. Substitutionen $u = u_1 + 1$, $v = v_1$ (motsvarar en parallellförflyttning) överför denna ekvation på ekvationen $u_1 = 5v_1^2$.

Sammanfattningsvis får vi att $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/5&-3/5\\3/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1+1\\v_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4/5&-3/5\\3/5&4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4/5\\3/5\end{bmatrix}$ vilket innebär att

Svar: det sökta koordinatsystemet har origo i punkten (4/5, 3/5) och dess koordinataxlar har riktningar (4/5, 3/5) och (–3/5, 4/5).

---

10. Matrisen $P = \begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$ diagonaliserar den sökta matrisen A så att $P^{-1}AP = D$ där $D = \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$

och vi får $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7&-2\\15&-4\end{bmatrix}$.

Svar: $\begin{bmatrix}7&-2\\15&-4\end{bmatrix}$.

Påståendet är sant för $n = 1$: $3^{2+1} + 2^{1+2} = 35$ är jämnt delbart med 7.

11.Antag att påståendet är sant för något n, dvs antag att för något n gäller att

11. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ är jämnt delbart med 7.
Vi vill visa att påståendet är sant för $n + 1$, dvs vi vill visa att
$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ är jämnt delbart med 7. Vi har
$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 9.3^{2n+1} + 2.2^{n+2} = 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7\cdot 3^{2n+1} =$
{enligt antagandet} = $= 2\cdot$(ett tal som är jämnt delbart med 7) + $7\cdot 3^{2n+1} =$
ett tal som är jämnt delbart med 7.
Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för $n = 1,2,3,\ldots..$
