Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 4A i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Är serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{3^n}$$

konvergent eller inte? MOTIVERA!!!

Lösning::

$0 \leq (\sin n)^2 \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{(\sin n)^2}{3^n} \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, och den geometriska serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ är konvergent eftersom $|1/3| < 1 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{3^n}$ är konvergent.

2. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Lösning:

$$\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \dots \to \frac{1}{6} \text{ då } x \to 0.$$

3. *Beräkna ett närmevärde till $\sqrt{5}$ och ange hur stor feltermen är på följande sätt:*

   (a) *Uttryck $\sqrt{5}$ som $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4 \cdot (1 + 1/4)} = 2\sqrt{1 + 1/4} = 2\sqrt{1+x}$ med $x = 1/4$.*

(b) *Framställ sedan* $\sqrt{1+x}$ *som ett andra ordningens MacLaurinpolynom plus en restterm.*

(c) *Sätt till slut in* $x = 1/4$.

Lösning: Eftersom

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2} \Longrightarrow f(0) = 1,\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2},\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \Longrightarrow \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{8} \quad \text{och}\\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2} \Longrightarrow \frac{f'''(c)}{3!} = \frac{1}{16\,(1+c)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

är

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}}$$

för något c mellan 0 och x. Sätter man in $x = 1/4$, så får man

$$
\begin{aligned}
\sqrt{5} =& 2\sqrt{1+1/4} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 16} + \text{ en felterm}\\
&= 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \text{ en felterm,}
\end{aligned}
$$

där

$$0 < \text{feltermen} < \frac{2\cdot(1/4)^3}{16} = \frac{2}{4^5}.$$