Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark

Lösningsförslag till kontrollskrivning 4B i 5B1147 Envariabelanalys för E, ht 2006.

1. *Är serien*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

konvergent eller inte? MOTIVERA!!!

Lösning::

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2+1/n} \to \frac{1}{2} \neq 0 \text{ då } n \to \infty$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \text{ är divergent.}$$

2. *Beräkna gränsvärdet*

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}.$$

Lösning:

$$\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots - x + \frac{x^3}{6}}{x^5} = \frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x^5}$$

$$= \frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \cdots \to \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \text{ då } x \to 0.$$

3. *Beräkna ett närmevärde till $\sqrt{10}$ och ange hur stor feltermen är på följande sätt:*

   (a) *Uttryck $\sqrt{10}$ som $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9 \cdot (1+1/9)} = 3\sqrt{1+1/9}$ $= 3\sqrt{1+x}$ med $x = 1/9$.*

   (b) *Framställ sedan $\sqrt{1+x}$ som ett andra ordningens MacLaurinpolynom plus en restterm.*

(c) *Sätt till slut in $x = 1/9$.*

Lösning: Eftersom

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2} \Longrightarrow f(0) = 1, \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}, \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \Longrightarrow \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{8} \quad \text{och} \\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}(1+x)^{-5/2} \Longrightarrow \frac{f'''(c)}{3!} = \frac{1}{16\,(1+c)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

är

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}}$$

för något c mellan 0 och x. Sätter man in $x = 1/9$, så får man

$$
\begin{aligned}
\sqrt{10} = & 3\sqrt{1+1/9} = 3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{9^2} + \text{ en felterm} \\
& = 3 + \frac{1}{18} - \frac{1}{216} + \text{ en felterm},
\end{aligned}
$$

där

$$0 < \text{feltermen} < \frac{3\cdot(1/9)^3}{16} = \frac{1}{16\cdot 243}.$$