Nr 7, 10 mars -05, Amelia 2

7 Extremvärden med bivillkor, obegränsade områden

Största och minsta värden handlar om en funktions värdemängd. Värdemängden ligger givetvis mellan det största och minsta värdet, så en fråga om en funktions värdemängd är ofta en fråga om största och minsta värden.

Exempel 1 *Vad är värdemängden för funktionen*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4}?$$

Lösning: Frågan är vad som är största och minsta värde för f.
Vilka är de stationära punkterna?

$$\begin{aligned}
0 &= f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4} = \frac{2x(1 + x^4 + y^4) - 4x^3(x^2 - y^2)}{(1 + x^4 + y^4)^2} \\
&= 2x\frac{y^4 - x^4 + 2x^2y^2 + 1}{(1 + x^4 + y^4)^2}, \text{ och på liknande sätt} \\
0 &= f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2 - y^2}{1 + x^4 + y^4} = 2y\frac{x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 1}{(1 + x^4 + y^4)^2}.
\end{aligned}$$

Så vi alla stationära punkter uppfyller

$$\begin{aligned}
x(y^4 - x^4 + 2x^2y^2 + 1) &= 0 \\
y(x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Vi får fyra möjligheter:

$$\begin{aligned}
A &: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{B:} \begin{cases} y^4 - x^4 + 2x^2y^2 + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
C &: \begin{cases} x = 0 \\ x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 1 = 0 \end{cases} \text{D:} \begin{cases} y^4 - x^4 + 2x^2y^2 + 1 = 0 \\ x^4 - y^4 + 2x^2y^2 + 1 = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

I fall A har vi $(0,0)$ med värdet $f(0,0) = \frac{0-0}{1+0+0} = 0$. I fall B får vi genom att sätta in $y = 0$ ekvationen

$$-x^4 + 1 = 0,$$

alltså $x = 1$ och $x = -1$. Här har vi värdena $f(\pm 1, 0) = \frac{1-0}{1+1+0} = \frac{1}{2}$.

I fall C får vi på analogt sätt punkterna $(0, \pm 1)$, som ger värdena $-\frac{1}{2}$.

I fall D kan vi summera de två ekvationerna för att få förenklingar. Det ger

$$2x^2y^2 + 1 = 0$$

som saknar lösningar ty VL är alltid >0.

Funktionen är kontinuerlig, så den antar alla värden mellan minimat $-\frac{1}{2}$ och maximat $\frac{1}{2}$.

Med polära koordinater kan vi se att

$$\begin{aligned} |f(r\cos v, r\sin v)| &= \left|\frac{r^2\cos^2 v - r^2\sin^2 v}{1 + r^4\cos^4 v + r^4\sin^4 v}\right| \leq \{\text{byt 1 mot 0}\} \\ &= \left|\frac{r^2\cos^2 v - r^2\sin^2 v}{0 + r^4\cos^4 v + r^4\sin^4 v}\right| \leq \frac{1}{r^2}\frac{\cos^2 v + \sin^2 v}{\cos^4 v + \sin^4 v} \\ &\leq \frac{1}{r^2}\frac{1+1}{\cos^4 v + \sin^4 v} \leq \frac{8}{r^2}. \end{aligned}$$

Den sista olikheten är sann om vi lyckas visa att

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^4 v + \sin^4 v} &\leq 4, \text{ dvs} \\ \cos^4 v + \sin^4 v &\geq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Enklast är väl att ta bort den minsta termen, dvs

$$\cos^4 v + \sin^4 v \geq \max(\cos^4 v, \sin^4 v)$$

som är minimalt när de är lika: $\cos^4 v = \sin^4 v$. Det ger $\cos v = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin v$, så

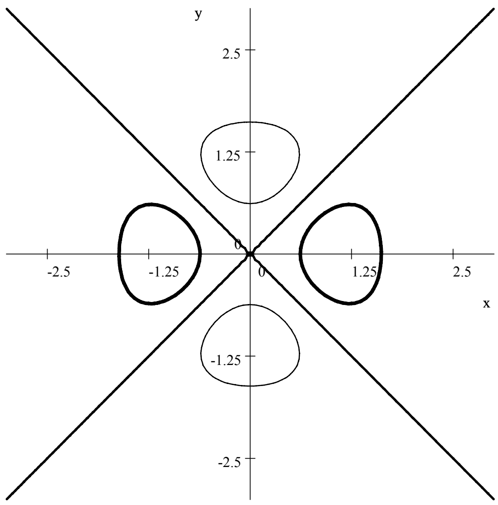
$$\cos^4 v + \sin^4 v \geq \max(\cos^4 v, \sin^4 v) = \frac{1}{4}.$$

Så

$$|f(r\cos v, r\sin v)| \leq \frac{8}{r^2}$$

oberoende av vinkeln v. Så utanför en cirkel med radie r har funktionen ingenstans värden större än $\frac{8}{r^2}$. Så om $\frac{8}{r^2} < \frac{1}{2}$, dvs utanför cirkeln $r = 2$, så har vi säkert $|f(x,y)| < \frac{1}{2}$ (kanske ännu närmare noll). Därmed är $-\frac{1}{2}$ respektive $\frac{1}{2}$ funktionens största och minsta värden.

Svar: $V_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.



Nivåkurvor $\frac{x^2-y^2}{1+x^4+y^4} = -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$.

7.1 Extremvärden med bivillkor

7.1.1 Två dimensioner

Betrakta följande maximeringsgproblem:

$$\max(f(x,y))$$
$$g(x,y) = 0$$

där f och g är kontinuerligt deriverbara funktioner. Här är $g(x,y) = 0$ ett bivillkor som punkterna (x,y) måste uppfylla. Som beskrivits i exempel i slutet på Nr 6 finns här huvudsakligen tre metoder:

1. **Lös ut bivillkoret och sätt in det i funktionen**. Ej alltid möjligt. En variabel elimineras. Exempel: från $f(x,y)$ till $f(x, \sqrt{1-x^2})$ – endast en variabel x.

2. **Parametrisera bivillkoret**. Ej alltid möjligt. En variabel elimineras. Exempel.: från $f(x,y)$ till $f(\cos v, \sin v)$ – endast en variabel v.

3. **Lagranges multiplikatormetod**. Mest generell. Här får vi problemet

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \lambda g'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) &= \lambda g'_y(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

   att lösa. Extremvärdena finns i denna lösningsmängd. Ofta kan man genast eliminera λ.

Vi får alltså en extra variabel λ, vi har tre ekvationer och tre variabler. De två första ekvationerna säger att funktionens gradient måste ha samma riktning som en normal till bivillkorsfunktionen, annars kan vi inte ha något extremvärde.

Exempel 2 *(825) Sök största och minsta värdet av* x^2+y^2 *då* $x^4y^2+x^2y^4=2$.

Lösning: Här kan vi lösa ut en variabel, ty

$$x^4y^2+x^2y^4=2$$

är en andragradsekvation i (t.ex.) x^2. Det ger

$$(x^2)^2+(x^2)y^2-2y^{-2}=0$$

med lösningarna

$$x^2=-\frac{y^2}{2}\pm\sqrt{\frac{y^4}{4}+\frac{2}{y^2}},\text{ dvs}$$

$$x=\pm\sqrt{-\frac{y^2}{2}\pm\sqrt{\frac{y^4}{4}+\frac{2}{y^2}}}.$$

Så om $y\to 0$ så går $x\to\infty$. Det betyder att funktionen x^2+y^2 inte kan vara uppåt begränsad. Den är nedåt begränsad av 0, men kanske detta inte är begränsningen under bivillkoret. Vi räknar med Lagranges metod.

Med $f(x,y)=x^2+y^2$ och $g(x,y)=x^4y^2+x^2y^4$ får vi gradienterna

$$\begin{aligned}\nabla f &= (2x,2y)\text{ och}\\ \nabla g &= (4x^3y^2+2xy^4,2x^4y+4x^2y^3).\end{aligned}$$

Så Lagranges villkor är

$$\begin{aligned}2x &= \lambda(4x^3y^2+2xy^4)\\ 2y &= \lambda(2x^4y+4x^2y^3)\\ x^4y^2+x^2y^4 &= 2\text{ (bivillkoret självt är ett viktigt villkor).}\end{aligned}$$

Förenklingar ger

$$\begin{aligned}x(\lambda(4x^2y^2+2y^4)-2) &= 0\\ y(\lambda(4x^2y^2+2x^4)-2) &= 0\\ x^4y^2+x^2y^4 &= 2.\end{aligned}$$

En lösning till de två första ekvationerna är $x=y=0$, vilken dock inte satisfierar bivillkoret.

$x = 0$ insatt i $(\lambda(4x^2y^2 + 2x^4) - 2)$ ger inte noll, så även denna kombination ger inte någon möjlighet. Kvar är

$$\begin{aligned} \lambda y^2(4x^2 + 2y^2) &= 2 \\ \lambda x^2(4y^2 + 2x^2) &= 2 \\ x^4y^2 + x^2y^4 &= 2. \end{aligned}$$

Division av de två första ekvationerna eliminerar λ :

$$y^2(4x^2 + 2y^2) = x^2(4y^2 + 2x^2).$$

Division med x^2y^2 ger

$$4 + 2(\frac{y}{x})^2 = 4 + 2(\frac{x}{y})^2,$$

alltså med $r = \frac{y}{x}$

$$r^2 = \frac{1}{r^2}.$$

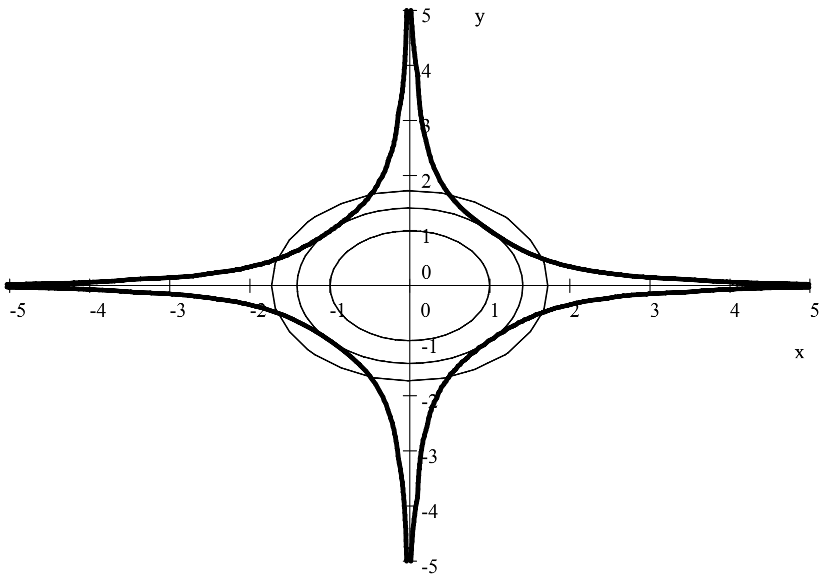
Således är $r = \pm 1$. Insättning av $y = \pm x$ ger ekvationerna

$$\begin{aligned} 6\lambda x^4 &= 2 \\ 2x^6 &= 2. \end{aligned}$$

Således är $x = \pm 1$ och $y = \pm 1$. Detta ger $f(\pm 1, \pm 1) = 1 + 1 = 2$.

Svar: Minsta värde är 2. Funktionen har inget största värde.

Man kan i figuren se att nivåkurvan svarande mot $f = 2$ tangerar bivillkorskurvan, i enlighet med Lagranges villkor.



Bivillkor (tjock) och nivåkurvor $f = 1, 2, 3$ (tunna).

Exempel 3 *(831) Har ekvationssystemet*

$$\begin{aligned} x^3 + 3x + y^3 + 3y &= \frac{7}{2} \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

någon lösning?

Lösning: Undersök om funktionen $f(x,y) = x^3 + 3x + y^3 + 3y$ tar värdet $\frac{7}{2}$ på cirkeln $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Här kan vi parametrisera med $(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos v, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin v)$, men enklare kalkyler ger nog Lagranges metod:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3 &= \lambda 2x \\ 3y^2 + 3 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Divison av de två första ekvationerna ger

$$2y(3x^2 + 3) = 2x(3y^2 + 3),$$

och differensen ger

$$3(x - y)(x + y - 2\lambda) = 0.$$

Om vi har $y = x$ från det andra bivillkoret får vi $x^2 = \frac{1}{4}$, så $x = \pm\frac{1}{2} = y$. Här har vi värdena $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ och $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$. Eftersom $\frac{7}{2}$ inte ligger i intervallet $[-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}]$ kan vi inte (ännu) svara ja på frågan.

Antag nu att $x + y = 2\lambda$. Vi får genom att addera de två första ekvationerna och sätta in den tredje:

$$\frac{3}{2} + 3 = 2\lambda(x + y),$$

dvs

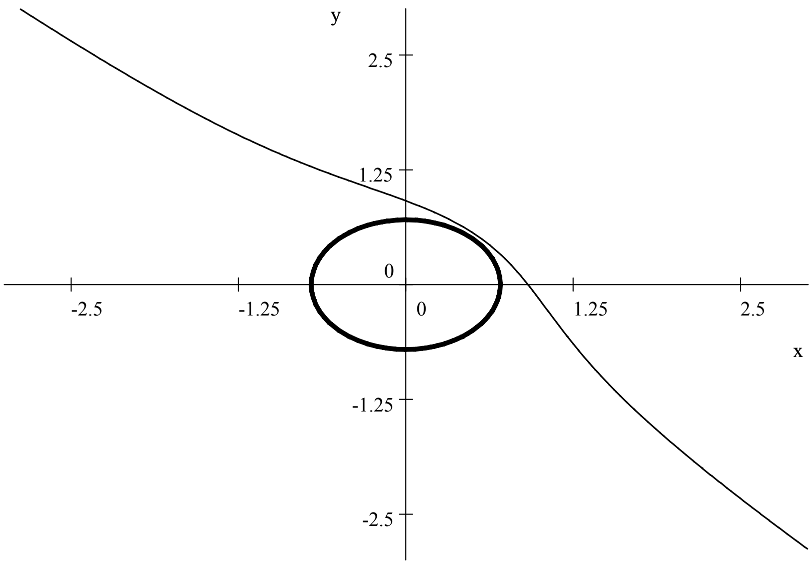
$$\frac{9}{2} = 4\lambda^2,$$

alltså $\lambda = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Insatt i $3x^2 + 3 = \lambda 2x$ ger detta

$$\begin{aligned} 3x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + 3 &= 0, \\ x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1 &= 0, \\ x &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{8} - 1} \end{aligned}$$

som inte har reella lösningar. Således tar funktionen sina värden i intervallet $[-\frac{7}{4}, \frac{7}{4}]$, och eftersom $\frac{7}{2}$ inte tillhör detta intervall har ekvationssystemet inte någon lösning.

Svar: Nej.



Nivåkurva $f = \frac{7}{2}$ (smal), bivillkor (tjock).

7.1.2 Tre dimensioner, ett bivillkor

I tre variabler och ett bivillkor får vi problemet

$$\begin{aligned} &\max(f(x,y,z)) \\ &g(x,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Lagranges metod ger då de fyra ekvationerna

$$\begin{aligned} f'_x &= \lambda g'_x \\ f'_y &= \lambda g'_y \\ f'_z &= \lambda g'_z \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

för fyra variabler x, y, z, λ. Lösningarna är möjliga största och minsta värden. Mera resonemang kring funktionen krävs för att avgöra vilken typ det är.

Exempel 4 *(828b) En triangel har vinklarna x, y och z. Vilka värden kan antas av $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$?*

Lösning: Vinkelsumman $x + y + z = \pi$ är bivillkoret. Vi vet också att $0 \leq x, y, z \leq \pi$.

Observera att för dessa värden på x, y, z så är $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z \geq 0$, och funktionen är lika med noll om någon av variablerna är noll. Så detta är minsta värdet. Vi söker nu största värdet.

Lagrange ger här

$$\begin{aligned} f'_x &= \cos x \sin y \sin z = \lambda \\ f'_y &= \sin x \cos y \sin z = \lambda \\ f'_z &= \sin x \sin y \cos z = \lambda \\ x + y + z &= \pi. \end{aligned}$$

Division av de två första villkoren ger

$$\frac{\cos x \sin y}{\sin x \cos y} = 1,$$

dvs

$$\tan x = \tan y.$$

Eftersom $0 \leq x, y, z \leq \pi$ betyder det att $x = y$, ty $\tan x$ är inverterbar i detta intervall.

På samma sätt får vi att $x = z$, så att $x = y = z$. Det ger med bivillkoret $x + y + z = \pi$ att $x = y = z = \frac{\pi}{3}$, och

$$f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Svar: Minsta värde: 0. Största värde: $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

7.1.3 Tre dimensioner, två bivillkor

I tre variabler och två bivillkor har vi problemet

$$\begin{gathered} \max(f(x, y, z)) \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0. \end{gathered}$$

Lagranges metod ger då fem ekvationer

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \text{ (tre ekvationer)} \\ g_1(x, y, z) &= 0 \\ g_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

för fem variabler x, y, z, λ, μ.

I allmänhet betyder de två bivillkoren skärningen mellan två ytor i rummet, dvs en skärningskurva. Det första vektorvillkoret (som är tre ekvationer) säger att gradienten till f måste befinna sig i det plan som spänns av normalerna till de två bivillkoren. Villkoren säger att f är en linjärkombination av de två normalerna, med konstanterna λ och μ. I annat fall har gradienten en komponent längs kurvan, och man kan få större värden genom att röra sig något i denna riktning, och lägre genom att röra sig något i motsatt riktning. Då har vi inte något extremvärde.

Extremvärdena finns i denna lösningsmängd.

Exempel 5 *(837) Bestäm det största och minsta värdet av $x+y+z$ på skärningskurvan mellan sfären $x^2+y^2+z^2=3$ och cylindern $xy=\frac{1}{2}$.*

Lösning: Sätt $f(x,y,z)=x+y+z$, $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$, $g_1(x,y,z)=xy-\frac{1}{2}$. De fem villkoren

$$\begin{aligned}\nabla f &= \lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2 \text{ (tre ekvationer)}\\ g_1(x,y,z) &= 0\\ g_2(x,y,z) &= 0.\end{aligned}$$

blir här

$$\begin{aligned}1 &= \lambda 2x+\mu y\\ 1 &= \lambda 2y+\mu x\\ 1 &= \lambda 2z\\ x^2+y^2+z^2 &= 3\\ xy &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Multiplikation av den första ekvationen med x och den andra med y, och subtraktion, eliminerar μ . Det ger

$$\begin{aligned}x-y &= 2\lambda(x^2-y^2),\\ 0 &= 2\lambda(x^2-y^2)-(x-y) \text{ (bryt ut } x-y)\\ &= (2\lambda(x+y)-1)(x-y).\end{aligned}$$

Så antingen har vi $x=y$ eller $2\lambda(x+y)-1=0$.

Fall A: $x=y$.

Vid insättning ger detta ger

$$\begin{aligned}2x^2+z^2 &= 3\\ x^2 &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

så $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=y$. Det ger $z^2=3-1=2$, $z=\pm\sqrt{2}$. Så $f=x+y+z$ antar värdena $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ och $-2\sqrt{2}$. Detta är preliminära största och minsta värden. Undersökning av villkoret $2\lambda(x+y)-1=0$ kan ge större och/eller mindre värden.

Fall B: $2\lambda(x+y)-1=0$.

Villkoret $1 = \lambda 2z$ ger här $x + y = z$, som med insättning i $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ger

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 2xy &= 3 \\ xy &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Insättning av $xy = \frac{1}{2}$ i det första villkoret ger då

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ xy &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

alltså samma punkter som vi fick tidigare.
Svar: Minsta värde: $-2\sqrt{2}$. Största värde: $2\sqrt{2}$.

7.2 Obegränsade områden

Vi börjar med en överblick av metoderna för extremvärden utan bivillkor. Vi har tre olika frågeställningar, och metoder för dem:

1. Bestäm alla lokala extremvärden för funktionen $f(x, y)$. Lösning:
   (a) Bestäm alla stationära punkter, dvs lös ekvationssystemet $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ (ev. även $f'_z = 0$).
   (b) Beräkna hessianen (matrisen av andraderivator), dvs alla andraderivator. För varje punkt i tur och ordning, avgör om hessianen är positivt definit (ger minimum), negativt definit (ger maximum) eller indefinit (ger sadelpunkt, som ej är ett extremvärde). Om hessianen är semidefinit får vi inget besked från andraderivatorna.

2. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x, y)$ på ett begränsat område. Lösning:
   (a) Undersök i tur och ordning
      i. Det inre i området. Varje stationär punkt i det inre är en kandidat till största och minsta värde. Bestäm värdet i varje sådan punkt.
      ii. Randkurvor. Funktionens värden på en randkurva är en funktion av en variabel, som vi kan kalla $g(x)$. Varje punkt där $g'(x) = 0$ är en kandidat. Bestäm värdet varje sådan punkt.
      iii. Hörn, dvs skärningar mellan randkurvor. Bestäm värdet i alla hörn genom insättning.
   (b) Det värde som är störst av kandidaterna från del i, ii och iii är det största värdet. Analogt för minsta värdet.

3. Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x, y)$ på ett obegränsat område. Lösning:

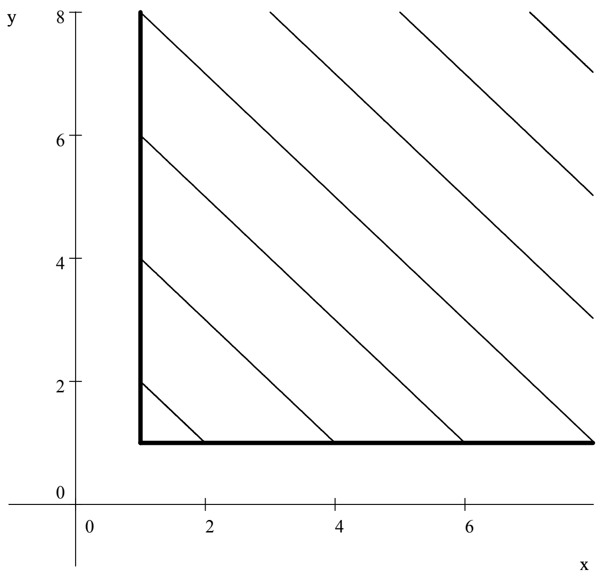
   (a) Bestäm alla kandidater enligt 2.

   (b) Uppskatta beteendet för $f(x, y)$ i den obegränsade delen, exempelvis genon att studera eller uppskatta $f(r \cos v, r \sin v)$ som funktion av r när $r \to \infty$, och/eller genom att titta på värdena för $f(x, kx)$ – längs en rät linje $y = kx$. Jämför studien med värdena från del a.

Observera att vi inte behöver beräkna hessianen när det bara frågas efter största och minsta värde.

Exempel 6 *(845b) Bestäm största och minsta värde för* $f(x, y) = (x+y)e^{-(x+2y)}$ *då* $x \geq 1$ *och* $y \geq 1$.

Lösning: Området är här obegränsat, det är bestämt av $x \geq 1$ och $y \geq 1$, det streckade området i nedanstående figur.



Vi får undersöka det inre, på kurvorna $y = 1$ och $x = 1$, i hörnet $(1, 1)$ och vad som händer i det obegränsade området.

Undersök först det inre.

Stationära punkter:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x}(x+y)e^{-(x+2y)} = \{\text{derivering av produkt}\} \\
&= e^{-(x+2y)} - (x+y)e^{-(x+2y)} \\
&= (1-(x+y))e^{-(x+2y)} \text{ och} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial y}(x+y)e^{-(x+2y)} = e^{-(x+2y)} - (x+y)2e^{-(x+2y)} \\
&= (1-2(x+y))e^{-(x+2y)}.
\end{aligned}$$

Eftersom $e^{-(x+2y)} > 0$ för alla x och y kan vi diviera med denna faktor: Vi får det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
x+y &= 1 \\
2x+2y &= 1
\end{aligned}$$

som uppenbarligen inte har någon lösning.

Vi studerar härnäst randkurvorna. På $x=1$ får vi

$$f(1,y) = (1+y)e^{-(1+2y)} = g(y),$$

så derivatan av g är

$$g'(y) = e^{-(1+2y)} - 2(1+y)e^{-(1+2y)} = 0.$$

som ger evationen

$$1-2-2y=0,$$

alltså $y = -\frac{1}{2}$. Detta är utanför området, ty vi har kravet $y \geq 1$ i förutsättningarna, så vi får ingen kandidat här.

På den andra randkurvan $y=1$ får vi

$$f(x,1) = (x+1)e^{-(x+2)} = h(x),$$

så

$$h'(x) = e^{-(x+2)} - (x+1)e^{-(x+2)} = 0,$$

som ger $x=0$ som också är utanför området (ty $x \geq 1$).

Hörn: $f(1,1) = (1+1)e^{-(1+2)} = 2e^{-3} \approx 0.0995$.

Vi har ett obegränsat område. Observera att $f(x,y) = (x+y)e^{-(x+2y)} > 0$ för alla x och y eftersom $x \geq 1$ och $y \geq 1$. Funktionen är nedåt begränsad.

På en rät linje $y = kx$ får vi

$$\begin{aligned}
f(x,kx) &= (x+kx)e^{-(x+2kx)} \\
&= (k+1)xe^{-(2k+1)x} \to 0
\end{aligned}$$

då $x \to \infty$ eftersom exponenten är negativ. Eftersom $f(x,y) > 0$ för alla (x,y) och $f(x,y)$ kommer godtyckligt nära noll, finns det inget minsta värde.

Svar: Största värde: $2e^{-3}$. Minsta värde: saknas.

Exempel 7 *(844) Bestäm största och minsta värde för*

$$f(x,y) = \frac{y^2+x}{1+x^2+y^2}.$$

Lösning: Stationära punkter:

$$\begin{aligned} 0 &= f'_x = \frac{1+x^2+y^2-(y^2+x)2x}{1+x^2+y^2} = \frac{1-x^2+y^2-2xy^2}{1+x^2+y^2}, \\ 0 &= f'_y = \frac{(1+x^2+y^2)2y-(y^2+x)2y}{1+x^2+y^2} = \frac{(1+x^2-x)2y}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Så vi har ekvationerna

$$\begin{aligned} 1-x^2+y^2-2xy^2 &= 0 \\ (1+x^2-x)2y &= 0. \end{aligned}$$

Från den andra ekvationen får vi de två möjligheterna $y=0$ och $1+x^2-x=0$.

Med $y=0$ i den första får vi $1-x^2=0$, så $x=\pm 1$. Här har vi värdena $f(\pm 1,0) = \frac{0+\pm 1}{1+1+0} = \pm\frac{1}{2}$. Detta är preliminärt största och minsta värden.

Ekvationen $1+x^2-x=0$ ger $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1}$ som saknar reella lösningar.

Vi har ingen rand, så det kvarstår att undersöka funktionen långt från origo. Vi börjar längs räta linjer, $y=kx$. Det ger

$$\begin{aligned} f(x,kx) &= \frac{k^2x^2+x}{1+x^2+k^2x^2} = \{\text{dividera med } x^2\} \\ &= \frac{k^2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1+k^2} \to \frac{k^2+0}{0+1+k^2} = \frac{k^2}{1+k^2} \end{aligned}$$

då $x \to \infty$. Så långt från origo är värdena positiva ($\frac{k^2}{1+k^2} \geq 0$), så $-\frac{1}{2}$ är minsta värde.

Om k är stort får vi värden nära 1 ($\frac{k^2}{1+k^2}$ är då nära 1). På $x=0$ har vi

$$f(0,y) = \frac{y^2+0}{1+0+y^2}$$

som är växande mot 1 då $y \to \infty$. Eftersom detta värde är större än det lokala maximat $(1,0)$, där vi fick $\frac{1}{2}$, har funktionen inget största värde.

Gränsvärdet $\frac{k^2}{1+k^2}$ längs de räta linjerna är positivt, så långt från origo är $f(x,y) \geq 0$. Det betyder att funktionen kan inte någonstans bli mindre än $-\frac{1}{2}$, ty om den var mindre än $-\frac{1}{2}$ i en punkt skulle vi där ha en stationär punkt. Men undersökningen ovan visar att de enda stationära punkterna är $(\pm 1, 0)$.

Svar: Största värde saknas. Minsta värde: $-\frac{1}{2}$.