Nr 6, 3 mars -05, Amelia 2

6 Differential, övningar om extremvärden, bivillkor

6.1 Differential

Taylors formel för en funktion $f(x, y)$ kan som bekant skrivas som

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x,y) + hf'_x(x,y) + kf'_y(x,y) + \\ &+ \frac{1}{2}(h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{xy}(x,y)) + ..., \end{aligned}$$

eller som

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial x})^i f(x,y).$$

Ett tredje sätt är med **differentialer** $d^i f$:

$$f(x+h, y+k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} d^i f(x,y).$$

Man brukar då betrakta punkten (x, y) som konstant och betrakta avbildningen ur h och k:s synvinkel, alltså som avbildningar av h och k. Det första differentialen är

$$df : (h,k) \to hf'_x(x,y) + kf'_y(x,y)$$

som alltså är en linjär avbildning av (h, k). Nästa differential är

$$d^2 f : (h,k) \to h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{xy}(x,y)$$

som är en kvadratisk funktion. Detta är ett annat synsätt på Taylors formel.

Detta går utmärkt att generalisera först till funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$f(x_1 + h_1, ..., x_n + h_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})^i f(x_1, ..., x_n).$$

eller med differentialer,

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} d^i f(x_1, ..., x_n)),$$

och därefter till funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$:

$$\mathbf{f}(x_1 + h_1, ..., x_n + h_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})^i \mathbf{f}(x_1, ..., x_n).$$

alternativt

$$\mathbf{f}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} d^i \mathbf{f}(x_1, ..., x_n)), .$$

Här sker allting komponentvis på

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Då är de två första differentialerna

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &: (h_1, ..., h_n) \to h_1 f_x'(x_1, ..., x_n) + ... + h_n f_y'(x_1, ..., x_n) \\ d^2\mathbf{f} &: (h_1, ..., h_n) \to (h_1, ..., h_n) H_f (h_1, ..., h_n)^T. \end{aligned}$$

Här är H_f hessianen och $(h_1, ..., h_n)^T$ är en transponerad radvektor, alltså en kolonnvektor.

Man kan visa att d^1 följer motsvarande regler som derivator, som $d(fg) = f(dg) + g(df)$ och $d(f \circ g) = df \circ dg$. Här är $df \circ dg$ en sammansättning av linjära avbildningar. Men motsvarande regler för högre differentialer, d^2, d^3 osv, är mer komplicerade.

6.2 Mera övningar om lokala extremvärden

Exempel 1 *(801f) Bestäm alla lokala extremvärden till* $f(x, y) = 8xy - 4x^2y - 2xy^2 + x^2y^2$.

Lösning: Stationära punkter:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x' = 8y - 8xy - 2y^2 + 2xy^2 \\ 0 &= f_y' = 8x - 4x^2 - 4xy + 2x^2y. \end{aligned}$$

Vi har inte linjära ekvationer så det finns inte någon generell lösningsmetod. Vi får försöka förenkla och faktorisera så gott vi kan.

$$\begin{aligned} 0 &= y(4 - 4x - y + xy) \\ 0 &= x(4 - 2x - 2y + xy), \end{aligned}$$

så vi får från den första ekvationen två fall: $y = 0$ och $3y - 4x + xy = 0$.

$y = 0$ ger i den andra

$$0 = x(4 - 2x),$$

så här får vi två stationära punkter: $(0, 0)$, $(2, 0)$.

$x = 0$ insatt i $y(4 - 4x - y + xy) = 0$ ger

$$0 = y(4 - y),$$

som ger en stationär punkt till: $(0,4)$.

Återstår att de två ekvationerna

$$\begin{aligned} 0 &= 4-4x-y+xy \\ 0 &= 4-2x-2y+xy \end{aligned}$$

gäller. Men addition av

$$\begin{aligned} 0 &= 4-4x-y+xy \text{ och} \\ 0 &= -4+2x+2y-xy \end{aligned}$$

ger nu $0=-2x+y$, alltså $y=2x$. I den första ekvationen ger detta

$$2x^2-6x+4=0, \text{ alltså } x^2-3x+2=0$$

Denna andragradsekvation har lösningarna $x=1$ och $x=2$. Det ger med $y=2x$ punkterna $(1,2)$ och $(2,4)$.

Så vi har fem stationära punkter. $(0,0),(2,0),(0,4),(1,2)$ och $(2,4)$. Vi undersöker andraderivatorna i dessa punkter i tur och ordning.

Andraderivatorna är:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -8y+2y^2 \\ f''_{xy} &= 8-8x-4y+4xy \\ f''_{yy} &= -4x+2x^2. \end{aligned}$$

I punkten $(0,0)$ får vi

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,0)=0 \\ B &= f''_{xy}(0,0)=8 \\ C &= f''_{yy}(0,0)=0. \end{aligned}$$

Alltså är här $AC-B^2=-64<0$. Här har vi en sadelpunkt.

I punkten $(2,0)$ får vi

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(2,0)=0 \\ B &= f''_{xy}(2,0)=-8 \\ C &= f''_{yy}(2,0)=0. \end{aligned}$$

Här är fortfarande $AC-B^2=-64<0$, med sadelpunkt.

I punkten $(0,4)$ får vi precis samma värden på A,B och C som i förra fallet:

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,4)=0 \\ B &= f''_{xy}(0,4)=-8 \\ C &= f''_{yy}(0,4)=0, \end{aligned}$$

så ännu en sadelpunkt.

I punkten $(1,2)$ får vi

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(1,2) = -16+8 = -8 \\ B &= f''_{xy}(1,2) = 8-8-8+8 = 0 \\ C &= f''_{yy}(1,2) = -4+2 = -2. \end{aligned}$$

Så här är $AC - B^2 = -8 \cdot (-2) - 0 = 16 > 0$. Vi har $A = -8 < 0$. Så här har vi ett lokalt maximum. Vi här här $f(1,2) = 8 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 4 = 4$.

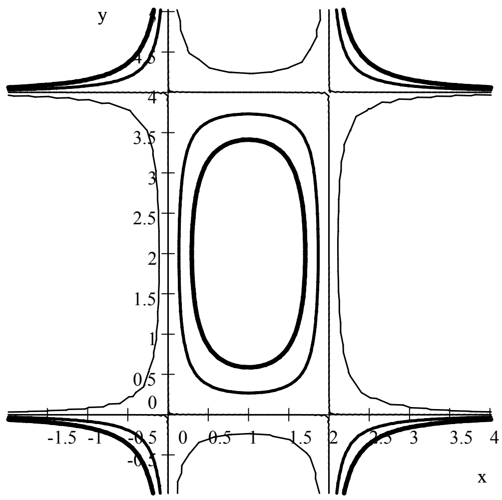
I punkten $(2,4)$, slutligen, får vi

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(2,4) = -32+32 = 0 \\ B &= f''_{xy}(2,4) = 8-16-32+32 = -8 \\ C &= f''_{yy}(2,4) = -8+8 = 0. \end{aligned}$$

Så här är $AC - B^2 = -64 < 0$. Vi har en sadelpunkt till.

Svar: Lokalt maximum i $(1,2)$, med värde 4 (och 4 sadelpunkter).

Detta bekräftas med en figur:



Nivåkurvor $8xy - 4x^2y - 2xy^2 + x^2y^2 = -1, 0, 1$ och 2.

Även här har vi sadelpunkter där nivåkurvor (svarande mot samma värde, egentligen samma nivåkurva) skär varandra. Det är en ganska hög topp i $(1,2)$, från de räta linjerna genom de fyra sadelpunkterna på höjd 0, till maximat i centrum med höjd 4.

Symmetrin i figuren runt punkten $(1,2)$ gör att man frestas att göra substitutionen $u = x - 1$ och $v = y - 2$. Det ger $x = u + 1$ och $y = v + 2$. Insättning ger

$$\begin{aligned} 8xy - 4x^2y - 2xy^2 + x^2y^2 &= 8(u+1)(v+2) - 4(u+1)^2(v+2) - \\ -2(u+1)(v+2)^2 + (u+1)^2(v+2)^2 &= \ldots = u^2v^2 - v^2 - 4u^2 + 4. \end{aligned}$$

Detta uttryck är symmetriskt i u och v – det förändras inte vid teckenbyten $u \to -u$ och $v \to -v$. Uttrycket kan också faktoriseras till

$$u^2v^2 - v^2 - 4u^2 + 4 = \left(u^2 - 1\right)\left(v^2 - 4\right) = (u-1)(u+1)(v-2)(v+2),$$

där det är synligt att $u = \pm 1$ och $v = \pm 2$ ger värdet konstant lika med noll (nivåkurvor $f(u,v) = 0$), och att $(0,0)$ ger värdet 4.

Exempel 2 *(811) Bestäm de positiva heltal n för vilka $f(x,y) = x^n - nxy + y^n$ har lokalt extremvärde i $(1,1)$.*

Lösning: Villkor för stationär punkt är

$$\begin{aligned} 0 &= f'_x = nx^{n-1} - ny \\ 0 &= f'_y = -nx + ny^{n-1}, \end{aligned}$$

så när $(x,y) = (1,1)$ får vi verkligen $f'_x = f'_y = 0$. Andraderivatorna är här

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f''_{xy}(x,y) &= -n \\ f''_{yy}(x,y) &= n(n-1)y^{n-2}, \end{aligned}$$

så när $(x,y) = (1,1)$ får vi

$$\begin{aligned} f''_{xx}(1,1) &= n(n-1) \\ f''_{xy}(1,1) &= -n \\ f''_{yy}(1,1) &= n(n-1). \end{aligned}$$

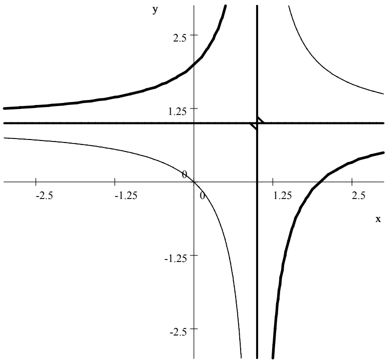
Detta ger

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= n^2(n-1)^2 - n^2 \\ &= n^4 - 2n^3 = n^3(n-2). \end{aligned}$$

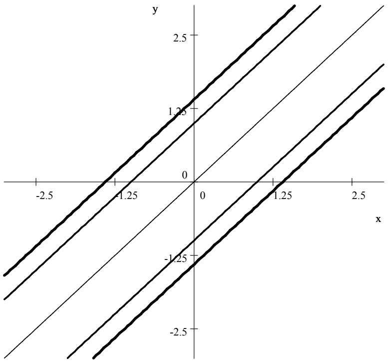
Så $AC - B^2 > 0$ om $n > 2$, då har vi en paraboloid. Eftersom $A = n(n-1) > 0$ har vi en lokal minimipunkt om $n > 2$.

För $n = 1$ är $AC - B^2 < 0$ så vi har en sadelpunkt. För $n = 2$ får vi inget besked. Men då har vi funktionen $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ som har ett lokalt minimum då $y = x$. Det kan vi avgöra utan att derivera eftersom $(x-y)^2 \geq 0$ för alla (x,y).

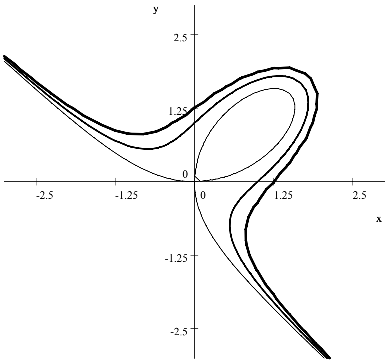
Nivåkurvor för $n = 2, 3, 4, 5$:



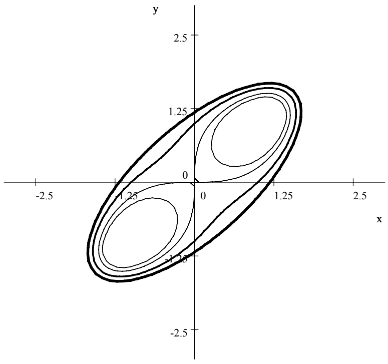
$x - xy + y = 0, 1, 2$



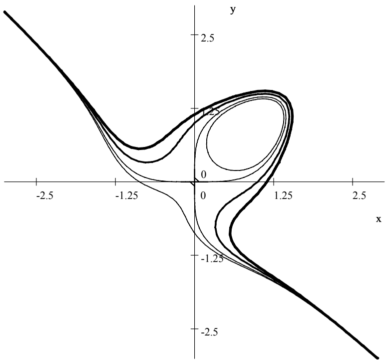
$x^2 - 2xy + y^2 = 0, 1, 2$



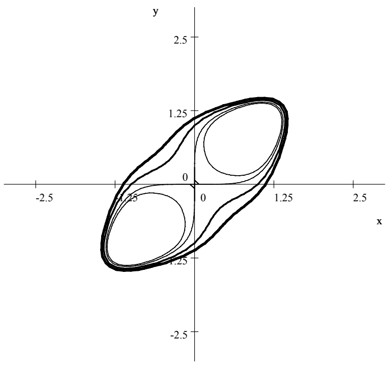
$x^3 - 3xy + y^3 = 0, 1, 2$



$x^4 - 4xy + y^4 = -0.5, 0, 1, 2$



$x^5 - 5xy + y^5 = -0.5, 0, 1, 2$



$x^6 - 6xy + y^6 = -0.5, 0, 1, 2$

Alla nivåkurvorna pekar ut $(1, 1)$ som ett troligt minimum. Men bara kalkylen, inte grafen, ger ett exakt svar på frågan var minimat ligger.

Exempel 3 *(812) Vilka av följande kvadratiska former av* (h, k, l) *är definita, indefinita eller semidefinita?*

a) $(h+k)^2 \geq 0$ men $h=-k$, till exempel $(h,k,l)=(1,-1,0)$ ger noll, så den är **positivt semidefinit**.

b)

$$\begin{aligned} h^2+k^2+kl &= \{\text{kvadratkomplettera } k\} \\ &= h^2+k^2+kl+\frac{1}{4}l^2-\frac{1}{4}l^2 \\ &= h^2++(k+\frac{1}{2}l)^2-\frac{1}{4}l^2 \end{aligned}$$

som är **indefinit** eftersom t.ex. $(h,k,l)=(1,0,0)$ och $(0,-1,2)$ ger olika tecken.

c)

$$\begin{aligned} h^2+k^2+l^2+2hk &= \{\text{kvadratkomplettera } k\} \\ &= (h-k)^2+l^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nu är frågan om uttrycket endast är noll då $(h,k,l)=(0,0,0)$. Uttrycket $=0$ ger oss följande ekvationer, eftersom alla tre kvadraterna då måste vara noll:

$$\begin{aligned} h-k &= 0 \\ l &= 0, \end{aligned}$$

så för $(h,k,l)=(1,1,0)$ är uttrycket noll. Då är denna form är **positivt semidefinit.**

d)

$$\begin{aligned} 2h^2+k^2+l^2+2hk+kl &= \{\text{kvadratkomplettera } h \text{ (förslagsvis)}\} \\ &= 2(h^2+hk)+k^2+l^2+kl \\ &= 2(h^2+hk+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}k^2)+k^2+l^2+kl \\ &= 2(h+\frac{1}{2}k)^2-\frac{1}{4}k^2+k^2+l^2+kl \\ &= \{\text{kvadratkomplettera } l \text{ (förslagsvis)}\} \\ &= 2(h+\frac{1}{2}k)^2+l^2+kl+\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}k^2+\frac{3}{4}k^2 \\ &= 2(h+\frac{1}{2}k)^2+(l+\frac{1}{2}k)^2+\frac{1}{2}k^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Eftersom $h+\frac{1}{2}k=0$, $l+\frac{1}{2}k=0$ och $k=0$ implicerar $h=k=l=0$ är formen **positivt definit.**

e)

$$\begin{aligned} h^2+2k^2+l^2-2hk-2kl &= \{\text{kvadratkomplettera } h \text{ (förslagsvis)}\} \\ &= (h^2-2hk+k^2)+k^2+l^2-2kl \\ &= 2(h-k)^2+(k-l)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Men med $h=1=k=l$ är detta noll utan att $h=k=l=0$, så formen är **positivt semidefinit.**

f)

$$\begin{aligned}
k^2-2hk-kl-hl &= \{\text{kvadratkomplettera } k: \ k^2-k(2h+l)+\text{kvadrat}\} \\
&= k^2-k(2h+l)+\frac{1}{4}(2h+l)^2-\frac{1}{4}(2h+l)^2-hl \\
&= (k-h-\frac{1}{2}l)^2-h^2+l^2-2hl-\frac{1}{4}l^2 \\
&= (k-h-\frac{1}{2}l)^2-(h-l)^2-\frac{1}{4}l^2
\end{aligned}$$

som tydligen är positiv då $k=1$, $h=l=0$ men negativ då $l=1$ men $h=1$ och $k=-\frac{3}{2}$. Den är **indefinit.**

6.3 Övningar om globala extremvärden

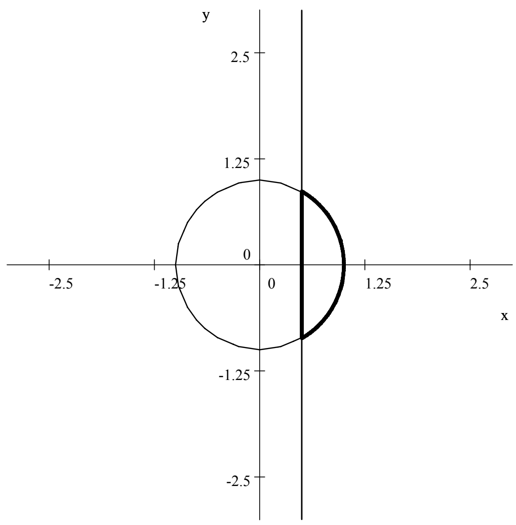
Notera att vid beräkning av globala extremvärden behöver inte andraderivator undersökas. Vi jämför bara funktionsvärdena i alla stationära punkter i det inre av området (Fall A nedan), inklusive kandidater som finns på randkurvor (Fall B) och i hörn: skärningar mellan randkurvor (Fall C).

Exempel 4 *(839) Bestäm största och minsta värde för*

$$f(x,y)=\frac{5x+12y}{x^2+y^2}$$

i området $x^2+y^2\le 1$ *och* $x\ge\frac{1}{2}$.

Definitionsområdet till $f(x,y)$ är ett cirkelsegment:$x^2+y^2=1$



Vi får söka efter extremvärden i tre delområden. Notera att skärningarna mellan $x^2+y^2=1$ och $x=\frac{1}{2}$ sker i $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

A. I det inre: $x^2+y^2<1$ **och** $x>\frac{1}{2}$.
Här är stationära punkter den enda möjligheten eftersom funktionen är deiverbar.

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{5x+12y}{x^2+y^2} = ... = \frac{(x+5y)(y-5x)}{(x^2+y^2)^2} = 0 \\ f'_y &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{5x+12y}{x^2+y^2} = ... = -2\frac{(3x+2y)(3y-2x)}{(x^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Detta ger ekvationerna

$$\begin{aligned} (x+5y)(y-5x) &= 0 \\ (3x+2y)(3y-2x) &= 0. \end{aligned}$$

Vi får fyra linjära ekvationssystem,

$$\left\{\begin{array}{c} x+5y=0 \\ 3x+2y=0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{c} y-5x=0 \\ 3x+2y=0 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{c} x+5y=0 \\ 3y-2x=0 \end{array}\right., \text{ och } \left\{\begin{array}{c} y-5x=0 \\ 3y-2x=0 \end{array}\right.$$

som alla har enda lösningen $(0,0)$. Denna punkt ligger utanför området, så vi fann alltså ingen stationär punkt i den inre.

B. På ränderna: $x^2+y^2=1$ **samt** $x=\frac{1}{2}$.
Låt oss först undersöka $x^2+y^2=1$. Använd att $x^2+y^2=1$ och sätt in $x=\sqrt{1-y^2}$. Vi får

$$g(y) = f(\sqrt{1-y^2}, y) = \frac{5\sqrt{1-y^2}+12y}{1},$$

så

$$g'(y) = 5\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} + 12 = 0.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} 5y &= 12\sqrt{1-y^2}, \\ 25y^2 &= 144-144y^2 \\ 169y^2 &= 144, \\ y &= \pm\frac{12}{13}. \end{aligned}$$

Dessa punkter ligger emellertid utanför området eftersom $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

På $x = \frac{1}{2}$ får vi

$$f(\frac{1}{2}, y) = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} + 12y}{(\frac{1}{2})^2 + y^2} = 2\frac{5 + 24y}{1 + 4y^2} = h(y).$$

Här har vi extremvärden om derivatan är noll:

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{d}{dy} 2\frac{5 + 24y}{1 + 4y^2} = ... \\ ... &= -16\frac{(3y - 1)(4y + 3)}{(4y^2 + 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

som ger $y = \frac{1}{3}$ och $y = -\frac{3}{4}$. Detta är tillåtna värden eftersom $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866\,03 < -0.75$.
$2\frac{5+24(-\frac{3}{4})}{1+4(-\frac{3}{4})^2} = -8$Detta ger

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = h(\frac{1}{3}) = 2\frac{5 + 24 \cdot \frac{1}{3}}{1 + 4(\frac{1}{3})^2} = 18$$

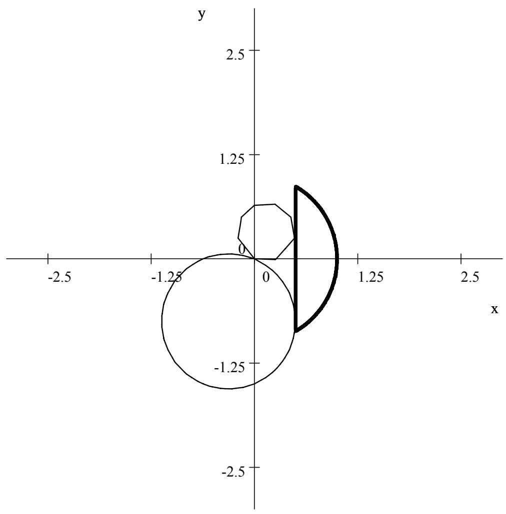
och

$$f(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}) = h(-\frac{3}{4}) = 2\frac{5 + 24(-\frac{3}{4})}{1 + 4(-\frac{3}{4})^2} = -8.$$

B. I hörnen: $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$
Vi får

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) &= \frac{5 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot (\pm\frac{\sqrt{3}}{2})}{1} \\ &= \begin{cases} \frac{5}{2} + 6\sqrt{3} \\ \frac{5}{2} - 6\sqrt{3}. \end{cases} \approx \begin{cases} 12.892 \\ -7.892\,3. \end{cases} . \end{aligned}$$

Jämför vi samtliga kandidater får vi minimum -8 i punkten $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ och maximum 18, i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Både ligger alltså på linjen $x = \frac{1}{2}$. Det är inte så oväntat med tanke på att det är den del som är närmast origo, och här går funktionens värden mot oändligheten.



Nivåkurvor: $f(x, y) = -8$ och $f(x, y) = 18$.

6.4 Extremvärden med bivillkor

Ibland vill man söka globala extremvärden för en funktion $f(x, y)$ under ett **bivillkor**, att $g(x, y) = 0$. Detta kan lösas på tre sätt, som vi illustrerar i följande exempel.

Exempel 5 *(815) Bestäm det största och minsta värdet för* $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ *(funktion som ska maximeras eller minimeras) på enhetscirkeln* $x^2 + y^2 = 1$ *(bivillkor).*

1. Sätt in bivillkoret i funktionen (ej alltid möjligt)
Här kan vi sätta in de två randfunktionerna $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ i funktionen, vilket ger

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x, \sqrt{1 - x^2}) = x^2 + 2(1 - x^2) - x \\ &= 2 - x^2 - x. \end{aligned}$$

Derivatan lika med noll ger

$$g'(x) = -2x - 1 = 0,$$

dvs $x = -\frac{1}{2}$.Detta svarar mot $y = \pm\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.Insättning ger

$$f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Nu har vi dock två hörn där randfunktionerna skär varandra, nämligen $(\pm 1, 0)$.Här får vi värdena

$$f(\pm 1, 0) = 1 + 0 \mp 1 = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right. .$$

Således har vi största värdet $\frac{9}{4}$ i punkterna $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ och minsta värde 0 i $(-1, 0)$.

2. **Parametrisera bivillkoret**

Bivillkoret kan parametriseras enligt $(x, y) = (\cos v, \sin v)$.Insättning av detta i funktionen ger

$$g(v) = f(\cos v, \sin v) = 1 + \sin^2 v - \cos v.$$

Vi får extremvärden om derivatan är noll:

$$g'(v) = \frac{d}{dv}\left(1 + \sin^2 v - \cos v\right) = \sin v + \sin 2v = 0,$$

som med $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$ ger

$$\sin v(1 + 2\cos v) = 0.$$

Så $\sin v = 0$ och $\cos v = -\frac{1}{2}$ ger stationära punkter för $g(v)$, och vi får $v = 0$ eller $v = \pi$ eller $v = \pm\frac{\pi}{3}$. Med $(x, y) = (\cos v, \sin v)$ får v då punkterna $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ som tidigare.

3. Lagranges multiplikatormetod

En normal till kurvan $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ är $\nabla g = \nabla(x^2 + y^2) = (2x, 2y)$. Generellt vet vi att kurvan $g(x, y) = C$ har normalen ∇g i en punkt på kurvan. Funktionen $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ har gradient $\nabla f = \nabla(x^2 + 2y^2 - x) = (2x - 1, 4y)$. Denna gradient anger i vilken riktning f växer snabbast. Om dessa två gradienter inte har samma riktning så finns kan $f : s$ värden bli större om vi rör oss längs kurvan åt ena hållet, och lägre åt andra hållet. Nämligen: riktningsderivatan av f längs en tangent till kurvan är inte noll. Då har vi inget lokalt min eller max. Därför måste dessa riktningar vara samma, vilket betyder att

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

för någon konstant λ, samtidigt som vi har bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$.

I vårt fall får vi de tre villkoren (för tre obekanta x, y, λ)

$$\begin{array}{rcl} (2x - 1, 4y) & = & \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{array}$$

Vi har alltså

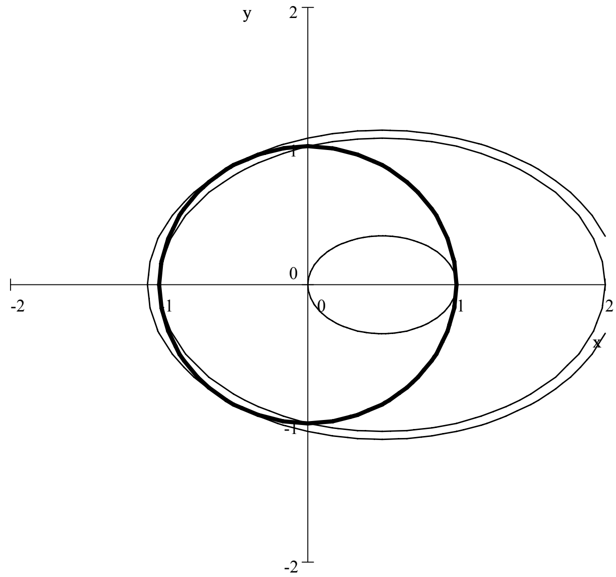
$$\begin{array}{rcl} 2x - 1 & = & \lambda 2x \\ 4y & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1. \end{array}$$

så från den andra ekvationen får vi $\lambda = 2$ eller $y = 0$.

Fallet $\lambda = 2$ ger nu med den första ekvationen $2x - 1 = 4x$, $x = -\frac{1}{2}$. Från $x^2 + y^2 = 1$ fås då $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, samma punkt som förut.

Fallet $y = 0$ ger med $x^2 + y^2 = 1$ att $x = \pm 1$. Vi får igen samma punkter som i de två föregående metoderna.

I nedanstående figur kan man se att de fyra punkter $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ som vi fick undersöka ovan alla har samma egenskap. I dessa punkter skär nivåkurvorna till funktionen och bivillkoret varandra **och** har samma normal (eller tangent, tangenten är ju vinkelrät till båda).



Nivåkurvor $f(x, y) = 0, 2, \frac{9}{4}$ och bivillkor $x^2 + y^2 = 1$.