Nr 3, 24 feb -05, Amelia 2

3 Övningar med implicita funktioner

3.1 Mera om implicita funktioner: $\mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^n$

I förra föreläsningen studerade vi det implicita sambandet

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

där $\mathbf{F} : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^n$, mellan variablerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$. Grundfrågan är: Är det möjligt att lösa ut $\mathbf{y}$ ur det implicita sambandet, som funktion av $\mathbf{x}$? Det är då naturligt att kalla $\mathbf{x}$ för **oberoende variabler** och $\mathbf{y}$ för **beroende variabler** (beroende av $\mathbf{x}$).

Notera att n är antalet ekvationer i $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Det visade sig att i punkter $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ där $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}$ är kontinuerligt deriverbar och

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$$

finns en kontinuerligt deriverbar funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ så att $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$. Jacobianen $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}$ inkluderar alltså *endast de beroende variablerna.* Det implicita sambandet $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ kan då göras till ett explicit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ nära punkten $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Notera att det är endast ett lokalt resultat (*tillräckligt nära* en punkt där det $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$).

Vi beskriver i det följande några olika specialfall av detta generella resultat.

3.1.1 $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$, $m = 1$, $n = 1$

Här har vi fallet

$$F(x, y) = 0,$$

så i punkter (x, y) där $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0$ finns det en funktion f så att $y = f(x)$. I punkter (x, y) där $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \neq 0$ finns det en funktion f så att $x = f(y)$.

Exempel: om $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ så är $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y$, så det finns nära $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ en funktion $y = f(x)$, vi vet att det är $y = \sqrt{1 - x^2}$. Nära $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ finns det också en sådan funktion, det är $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Men det finns inte då $y = 0$, ty då är $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2y = 0$. Det är punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 0)$.

3.1.2 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1$, $m = 2$, $n = 1$

Här har vi

$$F(x, y, z) = 0,$$

som i allmänhet beskriver en yta i $\mathbf{R}^3$. I punkter (x, y, z) där $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \neq 0$ finns det en funktion f så att $y = f(x, y)$, dvs då kan ytan i en omgivning till punkten tolkas som en funktionsgraf.

3.1.3 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $m = 1$, $n = 2$

Här är sambandet $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ de två ekvationerna

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

som i allmänhet är en kurva i $\mathbf{R}^3$. I punkter (x, y, z) där det $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial(y,z)} \neq 0$ kan kurvan beskrivas med en parameterframställning $z = f_1(x)$ $y = f_2(x)$ med x som parameter:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= f_1(t) \\ z &= f_2(t). \end{aligned}$$

Det är vad implicita funktionssatsen säger då $m = 1$ och $n = 2$. Vi har löst ut y och z ur sambandet $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ som funktion av x. Variabeln x är oberoende och variablerna y och z är beroende.

Här är ett linjärt exempel:

$$\begin{array}{c} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \end{array}.$$

Så

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}.$$

I ekvationssystemet

$$\begin{array}{c} by + cz = -ax \\ ey + fz = -dx \end{array}$$

kan vi lösa ut y och z (som funktion av x) om koefficientdeterminanten svarande mot dessa variabler är ej noll. Denna koefficientdeterminant är precis det $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial(y,z)}$, eftersom jacobianen till en linjär avbildning är matrisen själv.

3.2 Blandade uppgifter

Exempel 1 *(Uppgift 504) Visa att determinanten för jacobianen till* $\mathbf{f}(x, y) = ((2 + \arctan x)\cos y, (2 + \arctan x)\sin y)$ *är skild från noll i hela planet (för alla* (x, y)*). Är* $\mathbf{f}$ *inverterbar i hela planet (*$\mathbf{R}^2$*)?*

Lösning: Jacobianen är

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\cos y}{x^2+1} & -(2 + \arctan x)\sin y \\ \frac{\sin y}{x^2+1} & (2 + \arctan x)\cos y \end{pmatrix}$$

vars determinant är

$$\begin{aligned}
\det J_f(x,y) &= \left|\begin{pmatrix} \frac{\cos y}{x^2+1} & -(2+\arctan x)\sin y \\ \frac{\sin y}{x^2+1} & (2+\arctan x)\cos y \end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{2\cos^2 y + 2\sin^2 y + \cos^2 y \arctan x + \sin^2 y \arctan x}{x^2+1} \\
&= \frac{2+\arctan x}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Vi använde att $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ två gånger. Eftersom $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ för alla x, och $\frac{\pi}{2} < \frac{3.2}{2} = 1.6 < 2$, så är därmed $2+\arctan x > 0$ för alla x. Eftersom nämnaren $x^2+1 > 0$ också, är $\det J_f(x,y) > 0$ för alla (x,y).

Det följer inte från att $\det J_f(x,y) > 0$ för alla (x,y) att $\mathbf{f}$ är inverterbar som en funktion av alla (x,y), ty vi har endast ett lokalt resultat: för alla (x,y) *finns någon omgivning* där $\mathbf{f}$ är inverterbar.

Eftersom $\cos y$ är periodisk med perioden 2π följer att $\mathbf{f}(x,y) = \mathbf{f}(x,y+2\pi)$. Så $\mathbf{f}$ är inte en inverterbar funktion som funktion av hela $\mathbf{R}^2$.

Svar: Nej.

Exempel 2 *(Uppgift 505e) Bestäm alla punkter som har en omgivning där* $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, e^y \cos z, e^y \sin z)$ *har en inverterbar invers.*

Lösning: Jacobianen är

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ 0 & e^y \sin z & e^y \cos z \end{pmatrix}$$

med determinant

$$\begin{aligned}
\det J_f(x,y,z) &= \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^y \cos z & -e^y \sin z \\ 0 & e^y \sin z & e^y \cos z \end{pmatrix}\right| \\
&= \cos^2 z e^{2y} + \sin^2 z e^{2y} = e^{2y}.
\end{aligned}$$

Eftersom $\det J_f(x,y,z) > 0$ för alla (x,y,z) har funktionen en differentierbar invers för alla punkter i $\mathbf{R}^3$.

Svar: Alla punkter.

Exempel 3 *(Uppgift 507b) Visa att*

$$\begin{aligned}
u &= xy \\
v &= \ln \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

är lokalt inverterbar. Beräkna jacobian och inversens jacobian.

Lösning: Notera att $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$. Vi får

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

med determinant

$$\det J_f = \left| \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \end{pmatrix} \right| = -2.$$

Så funktionen är lokalt inverterbar överallt. Vi kan beräkna inversens jacobian genom att invertera matrisen:

$$J_{f^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} & -x \\ -\frac{1}{x} & y \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}, J_{f^{-1}}(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & x \\ \frac{1}{x} & -y \end{pmatrix}.$$

Exempel 4 *(Uppgift 508) Bestäm alla värden på konstanten a så att*

$$\mathbf{f}(x,y) = (ax + \sin y + \cos y, ay + \cos x)$$

har en differentierbar invers i en omgivning runt $(0,0)$. *Bestäm inversens jacobian.*

Lösning: Jacobianen är

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} a & \cos y - \sin y \\ -\sin x & a \end{pmatrix}.$$

Dess determinant är

$$\left| \begin{pmatrix} a & \cos y - \sin y \\ -\sin x & a \end{pmatrix} \right| = a^2 - \cos y \sin x - \sin y \sin x,$$

med värdet $a^2 - \cos 0 \sin 0 - \sin 0 \sin 0 = a^2$ i origo, $(x,y) = (0,0)$. Således har funktionen en differentierbar invers om och endst om $a \neq 0$.

I origo har vi jacobianen

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} a & \cos 0 - \sin 0 \\ -\sin 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Så inversen har jacobianen

$$J_f^{-1}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Svar: $a \neq 0$ och $J_f^{-1}(0,0) = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exempel 5 *(Uppgift 521) Visa att*

$$\begin{aligned} 2e^x - e^y - e^z &= 0 \\ xyz &= 1 \end{aligned}$$

i en omgivning till $(1,1,1)$ *definerar två kontinuerligt deriverbara funktioner* $x = x(z)$ *och* $y = y(z)$*. Beräkna* $x'(1)$.

Lösning: Se avsnitt 3.1.3 ovan. Vi har

$$\mathbf{F}(x,y,z)\begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x - e^y - e^z \\ xyz - 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ska undersöka $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(x,y)}$, som är

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x & -e^y \\ yz & xz \end{pmatrix},$$

med determinant

$$\det J_f(x,y,z) = \left| \begin{pmatrix} 2e^x & -e^y \\ yz & xz \end{pmatrix} \right| = 2z(x+y)e^y.$$

Vi får då $\det J_f(1,1,1) = 4e \neq 0$. Så från implicita funktionssatsen finns kontinuerligt deriverbara funktioner $x = x(z)$ och $y = y(z)$.

För att bestämma $x'(1)$ deriverar vi implicit m.a.p. variabeln z i sambanden

$$\begin{aligned} 2e^{x(z)} - e^{y(z)} - e^z &= 0 \\ x(z)y(z)z &= 1. \end{aligned}$$

Det ger

$$\begin{aligned} 2e^{x(z)}x'(z) - e^{y(z)}y'(z) - e^z &= 0 \\ x'(z)y(z)z + x(z)y'(z)z + x(z)y(z) &= 0. \end{aligned}$$

Insättning av $(1,1,1)$, alltså av $x = y = z = 1$ ger

$$\begin{aligned} 2ex'(1) - ey'(1) - e &= 0 \\ x'(1) + y'(1) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Dividerar vi bort e och adderar ekvationerna så får vi

$$3x'(1) = 0.$$

Svar: $x'(1) = 0$.

Exempel 6 *(Uppgift 526) Visa att det finns en omgivning till* $(x, y, u, v) = (0, 1, 2, 3)$ *där*

$$\begin{aligned} x + y + u - v &= 0 \\ x^2 - y^2 - u^2 + v^2 &= 4 \end{aligned}$$

som definerar två kontinuerligt deriverbara funktioner $u = u(x, y)$ *och* $v = v(x, y)$*. Låt* $\mathbf{f}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$*.*

a) Bestäm $J_f(0, 1)$*.*

b) Bestäm $J_{f^{-1}}(2, 3)$*.*

c) Bestäm u'_x*,* u'_y*,* v'_x*,* v'_y *i* $(0, 1)$*.*

d) Bestäm u'_x*,* u'_y*,* v'_x*,* v'_y *i* $(2, 3)$*.*

Lösning: Vi har här

$$\mathbf{F}(x, y, z) \begin{pmatrix} F_1(x, y, u, v) \\ F_2(x, y, u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + u - v \\ x^2 - y^2 - u^2 + v^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Beroende variabler är u och v så vi är intresserade av

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2u & 2v \end{pmatrix},$$

så

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(u, v)}(x, y, u, v) = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2u & 2v \end{pmatrix} \right| = 2v - 2u.$$

I punkten $(0, 1, 2, 3)$ får vi då

$$\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial(u, v)}(0, 1, 2, 3) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 2 \neq 0,$$

Sätter vi in $v = x + y + u$ i $x^2 - y^2 - u^2 + v^2 = 4$ får vi

$$x^2 - y^2 - u^2 + (x + y + u)^2 = 4,$$

som ger

$$2ux + 2uy + 2xy + 2x^2 = 4,$$

dvs

$$u = \frac{2 - xy - x^2}{x + y} = \frac{2}{x + y} - x.$$

Med $v = x + y + u = x + y + \frac{2 - xy - x^2}{x + y}$ får vi funktionerna $u(x, y)$ och $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2}{x + y} - x \\ v(x, y) &= \frac{2}{x + y} + y. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
J_f(x,y) &= \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{(x+y)^2} - 1 & -\frac{2}{(x+y)^2} \\ -\frac{2}{(x+y)^2} & -\frac{2}{(x+y)^2} + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}
\det J_f(0,1) &= \left| \begin{pmatrix} -\frac{2}{1} - 1 & -\frac{2}{1} \\ -\frac{2}{1} & -\frac{2}{1} + 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right| = 3 - 4 = -1.
\end{aligned}$$

Så **f** är lokalt inverterbar. Genom att invertera

$$J_f(0,1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

får vi $J_{f_{-1}}(2,3)$

$$J_{f_{-1}}(2,3) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Så vi har

Svar: $J_f(0,1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ och $J_{f_{-1}}(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, som innehåller alla lokala partiella derivator.

Exempel 7 *(Uppgift 442 + riktning) Bestäm riktningsderivatan av* $f(x,y,z) = \sin xy + \tan yz$ *i punkten* $(0, \frac{\pi}{4}, 1)$ *i riktningen mot* $(2, \frac{\pi}{2}, 0)$. *Finns det någon riktning* $\mathbf{v}$ *där* $f'_{\mathbf{v}} = 1$?

Lösning: Vi har gradienten

$$\nabla f(x,y,z) = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y \cos xy, x \cos xy + \frac{z}{\cos^2 yz}, \frac{y}{\cos^2 yz}).$$

Vi får i punkten $(0, \frac{\pi}{4}, 1)$

$$\begin{aligned}
\nabla f(0, \frac{\pi}{4}, 1) &= (\frac{\pi}{4} \cos 0, \cos 0 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}, \frac{\frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}) \\
&= (\frac{\pi}{4}, 3, \frac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

Vi ska beräkna riktningsderivatan i riktningen $(2, \frac{\pi}{2}, 0) - (0, \frac{\pi}{4}, 1) = (2, \frac{\pi}{4}, -1)$. Vi normerar vektorn,

$$\frac{(2, \frac{\pi}{4}, -1)}{\sqrt{2^2 + (\frac{\pi}{4})^2 + (-1)^2}},$$

och kan beräkna riktningsderivatan i denna riktning:

$$\begin{aligned}\nabla f(0, \frac{\pi}{4}, 1) \cdot \frac{(2, \frac{\pi}{4}, -1)}{\sqrt{5 + (\frac{\pi}{4})^2}} &= (\frac{\pi}{4}, 3, \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{(2, \frac{\pi}{4}, -1)}{\sqrt{5 + (\frac{\pi}{4})^2}} \\ &= \frac{3}{4} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{16}\pi^2 + 5}}.\end{aligned}$$

Finns det någon riktning $\mathbf{v}$ där $f'_{\mathbf{v}} = 1$?

Gradientens belopp är övre gräns för vilka riktningsderivator $\nabla f(0, \frac{\pi}{4}, 1) \cdot \mathbf{v}$ som finns i punkten, den är maximal om $\mathbf{v}$ har gradientens riktning, dvs $\mathbf{v} = \nabla f / |\nabla f|$ ($\mathbf{v}$ måste normeras). Gradientens belopp är

$$\left|\nabla f(0, \frac{\pi}{4}, 1)\right| = \left|(\frac{\pi}{4}, 3, \frac{\pi}{2})\right| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 9 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \approx 3.476.$$

Således finns det någon riktning $\mathbf{v}$ där $f'_{\mathbf{v}} = 1$ i punkten, eftersom $1 < \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 9 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

Svar: $\frac{3}{4} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{16}\pi^2 + 5}}$, ja.