Nr 1, 21 feb -05, Amelia 2
Obs: "m.a.p." betyder "med avseende på".

1 Koordinattransformationer

1.1 Bakgrund (inte på denna föreläsning)

1.1.1 Från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}^2$, och $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}^3$

Vi har sett att en funktion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}^2$, betecknad med $\mathbf{r}(t)$ kan tolkas som en kurva i planet En funktion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}^3$ är en kurva i rummet $\mathbf{R}^3$. Derivatan $\mathbf{r}'(t)$ är en tangent i punkten $\mathbf{r}(t)$ om $\mathbf{r}(t)$ är deriverbar och $\mathbf{r}'(t) \neq \overline{0}$. Dessutom får man kurvans längd genom att integrera beloppet av tangentvektorn $|\mathbf{r}'(t)|$ för parametervärden som svarar mot startpunkt och slutpunkt.

1.1.2 Från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$

En funktion från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$, betecknad med $\mathbf{r}(t, s)$ (två parametrar, ty argumenten i $\mathbf{R}^2$) beskriver ett ytstycke i rummet. Håller vi t konstant t_0 har vi en kurva $\mathbf{r}(t_0, s)$ som funktion av en parameter s. På samma sätt är $\mathbf{r}(t_0, s)$ en kurva med parametern s. Kurvorna $\mathbf{r}(t_0, s)$, för olika t_0, och $\mathbf{r}(t, s_0)$, för olika s_0, kallas **kurvskaror,** som ytan består av. För ett reguljärt utstycke kräver vi att dessa kurvors tangenter $\mathbf{r}'_t$ och $\mathbf{r}'_s$ är kontinuerliga och att de inte har samma riktning (så att de verkligen ger en yta), vilket betyder att deras kryssprodukt inte är nollvektorn: $\mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_s \neq \mathbf{0}$.

Ett viktigt exempel på ett reguljärt ytstycke är sfäriska koordinater, som med parametrarna u och v beskriver en sfärisk yta i $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v. \end{cases}$$

Men även funktioner från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}$ tolkas som ytstycken, hur går det till? Uttrycket $z = f(x, y)$ betyder att vi tolkar funktionsvärdet som en z-koordinat .Vi får då en funktion från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^3$, nämligen

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = f(t, s). \end{cases}$$

som vi också kan skriva som $\mathbf{r} = (t, s, f(t, s))$. Då har vi gått från en yta beskriven med en ekvation $z = f(x, y)$ till en parameterframställning. Tangentvektorer fås genom derivering: $\mathbf{r}'_t = (1, 0, f'_t)$ och $\mathbf{r}'_s = (0, 1, f'_s)$. Kryssprodukt av dem ger en normal till ytan.

Ett tredje sätt att beskriva en yta är en nivåkurva till en funktion av tre variabler. Det är alla punkter (x, y, z) som satisfierar en ekvation

$$F(x, y, z) = C.$$

Gradienten $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ är normal till en sådan yta. En ekvation $z = f(x, y)$ kan skrivas på detta sätt genom att flytta över $f(x, y)$ till andra sidan av ekvationen $z = f(x, y)$, som ger

$$z - f(x, y) = 0,$$

så att $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Då är $\nabla F = (-f'_x, -f'_y, 1)$ en normal i punkten (x, u, z). Detta är också resultatet av $\mathbf{r}'_t \times \mathbf{r}'_s$ med $\mathbf{r}'_t = (1, 0, f'_t)$ och $\mathbf{r}'_s = (0, 1, f'_s)$. Det är normalen från ytans parameterform.

2 Från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$: koordinattransformationer

Hur kan man toka en funktion från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$, eller en funktion från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$?Jo, en viktig tolkning är **koordinattransformationer**. Låt oss börja med funktioner från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$. Två samband enligt

$$T^{-1} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases},$$

som till exempel

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = 3u - v \\ y = -u + 2v \end{cases},$$

definierar en funktion från $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ till $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Det andra exemplet ovan är en linjär avbildning, där alltså $(x, y)^T = A(u, v)^T$**,** där A är en matris. Poängen med koordinattransformationer är att vi kan alternativt använda variablerna (x, y) eller (u, v). Vi kan arbeta med xy-planet alternativt uv-planet. Många problem blir enklare när vi transformerat till lämpliga koordinater. Det gäller både partiella differentialekvationer och dubbelintegraler.

För att vi ska kalla detta en koordinattransformation krävs att vi kan gå fram och tillbaka obehindrat, vilket innebär att avbildningen ska vara *inverterbar.* Av en linjär koordinattransformation kräver vi då att dess matris A ska vara en inverterbar matris.Låt oss använda följande beteckningar:

$$T : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (\text{från } (x, y) \text{ till } (u, v)),$$

och

$$T^{-1} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (\text{från } (u, v) \text{ till } (x, y)),$$

Ofta har vi explicita samband bara i den ena riktningen – bara en av T och T^{-1} är rimligt enkla funktioner. Ett exempel är de viktiga polära koordinaterna, där vi har

$$T^{-1} : \begin{cases} x = r \cos v \\ y = r \sin v \end{cases}$$

men

$$T : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ v = \arctan \frac{y}{x} + \pi\theta(-x) \end{cases},$$

Termen $\pi\theta(-x)$ bygger på stegfunktionen $\theta(t)$ som är 1 för positiva t och 0 för negativa. Termen $\pi\theta(-x)$ säger bara att vi måste lägga till π om $x < 0$, funktionen $\arctan \frac{y}{x}$ ligger ju alltid mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$. I korthet är i detta fall avbildningen T^{-1} lätt att beskriva och räkna med, men inte T. Det är en vanlig situation.

2.1 Jacobianen, yt- och volymförstoring

En kontinuerligt deriverbar envariabelfunktion är $f(x)$ garanterat är inverterbar om $f'(x) \neq 0$, i alla fall nära x, ty då är den antingen växande eller avtagande nära x. Man kan från värdena rekonstruera argumenten. Av liknande skäl är vi intresserade av alla derivator till avbildningen $(u, v) \to (x(u, v), y(u, v)))$, dvs

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}.$$

Denna matris kallas **Jacobimatrisen** eller **jacobianen** för koordinattransformationen. Motsvarande matris för den inversa avbildningen, dvs $(x, y) \to (u(s, y), v(x, y)))$, kallar man också jacobianen:

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Linjära avbildningar

Om transformationen är linjär, som exempelvis

$$\begin{cases} x = 3u - v \\ y = -u + 2v \end{cases}$$

är jacobianen

$$J = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

(som $x'_u = \frac{\partial}{\partial u}(3u - v) = 3$) alltså samma matris som själva avbildningsmatrisen. Ytförstoringen är då determinanten av jacobianen, dvs i detta fall

$$\det J = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ y = -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1)(-1) = 5.$$

En yta har därför efter avbildningen (i xy-planet) 5 gånger större area än innan avbildningen (i uv-planet).

Att detta är ytförstoringen följer av att den area som spänns upp av två vektorer (parallellogram) i planet ges av determinanten av den matris som har vektorerna som kolonnvektorer. De två vektorerna $(1,0)$ och $(0,1)$ spänner upp en area 1 (kvadrat med sida 1) och de avbildas på den linjära avbildningen på matrisens kolonnvektorer. Detta ger i ovanstående exempel en faktor 5 mellan de två areorna.

Notera att ytförstoringen av en rotation, med matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

har determinant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. En rotation ändrar inte storleken. Ytförstoringen av en ren skalning med en faktor a i både x- och y-led, med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

har ytförstoring $\det A = a^2$. En motsvarande skalning i tre dimensioner har givetvis volymförstoring a^3.

2.1.2 Icke-linjära avbildningar

För en icke-linjär avbildning beskriven med

$$T : \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad \text{(från } (x,y) \text{ till } (u,v)\text{)},$$

eller

$$T^{-1} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad \text{(från } (u,v) \text{ till } (x,y)\text{)},$$

som har kontinuerliga derivator ändrar sig derivatorna mindre än ε i en omgivning till en punkt (u,v) (ty de är kontinuerliga). Så för areor mycket nära denna punkt gäller "nästan" det linjära fallet. Så mycket nära punkten har vi ytförstoring enligt determinanten av jacobianen:

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Denna determinant av partialderivator representerar därför **den lokala ytförstoringen** (lokal – nära punkten, den kan variera mellan olika punkter).

I tre dimensioner, med $\mathbf{r} = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, representerar determinanten av jacobianen

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

den lokala volymförstoringen.

Analogt med att $f(x)$ är inverterbar nära x om $f'(x) \neq 0$, så är en koordinattransformation inverterbar om determinanten av jacobianen inte är noll.

Det betyder alltså att ytförstoringen inte får vara noll (utom i enstaka punkter). I sådana punkter avbildas en area på en linje, så man kan vänta sig att det inte går att rekonstruera argumenten på arean från värdena på linjen. I så fall är transformationen inte inverterbar.

Vi kräver därför normalt av en koordinattransformation att $\det J \neq 0$, **utom i enstaka punkter.**

Exempel 1 *Bestäm den lokala ytförstoringen för polära koordinater*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

Lösning. De partiella derivatorna x'_r, x'_v, y'_r och y'_v är lätta att beräkna, så jacobianen är

$$\frac{d(x,y)}{d(r,v)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

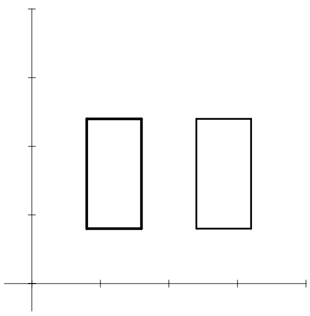
Dess determinant är

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta \\ &= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r. \end{aligned}$$

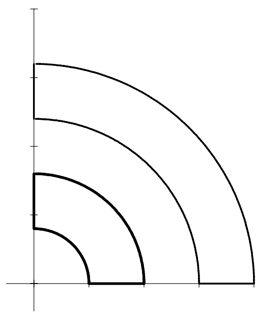
Svar: Den lokala ytförstoringen i punkten (r,θ) är r.

Denna ökar med avståndet från origo i $r\theta$-planet. Detta är helt naturligt, ty en ruta i $r\theta$-planet $\{a < r < b, c < \theta < d\}$ är i xy-planet en sektor av en cirkelring. Den har i $r\theta$-planet arean $(b-a)(d-c)$. Ju längre från origo den befinner sig, ju större area motsvarar den i xy-planet.

Nedanstående figur ger ett exempel. Här är r åt höger i $r\theta$-planet. Rutorna i detta plan är lika stora, men den motsvarande ruta i xy-planet som har större värde på r (den högra rutan i $r\theta$-planet) är större. Ytförstoringen ökar med avståndet från origo, som är r.



Rutor i $r\theta$-planet.



Rutorna avbildade i xy-planet.

Exemplet är schematiskt, ty lokal ytförstoring syftar på avbildning *nära* en punkt. Dvs: vi avbildar geometriska figurer nära en punkt som är så små att yförstoringen är nästan konstant i hela figuren. Figurer på enhetscirkeln ($r = 1$) ändrar inte sin area obetydligt (beroende på utsträckning innanför och utanför enhetscirkeln).

3 Kedjeregeln vid koordinattransformationer

Vi har kedjeregeln i en och två variabler som följer:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(x(t)) &= f'(x(t))x'(t) \text{ (en variabel)}\\ \frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) &= f'_x(x(t),y(t))x'(t) + f'_y(x(t),y(t))y'(t) \text{ (två variabler).}\end{aligned}$$

I två variabler deriverar vi alltså t först "via x" och sedan via y,och adderar resultaten. I tre variabler får vi endast en tredje term på liknande sätt. Kedjeregeln följer från definitionen av differentierbarhet, vilket i sin tur är nära knutet till approximation av en funktion nära en punkt med tangentplanet i denna punkt. Denna approximation kallas linearisering – approximera funktionen med tangenplanet.

För en koordinattransformation som har två variabler u och v, och inte endast en (som t ovan), deriverar vi alltid med avseende på en variabel i taget, så det blir samma kedjeregel som ovan. Den andra variabeln förekommer emellertid i formlerna, så det hela ser något mer komplicerat ut (svängda ∂ och inte d, ty vi har två variabler som vi kan derivera):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial u}f(x(u,v)),y(u,v))) =\\ = f'_x(x(u,v)),y(u,v)))x'_u(u,v)) + f'_y(x(u,v)),y(u,v)))y'_u(u,v))\end{gathered}$$

eller med ett kortare och mer överblickbart skrivsätt:

$$\frac{\partial}{\partial u}f(x,y) = f'_x x'_u + f'_y y'_u.$$

För v får vi helt analogt:

$$\frac{\partial}{\partial v}f(x,y) = f'_x x'_v + f'_y y'_v.$$

När vi beräknar andradervator så gäller samma kedjeregel även om vi byter f överallt mot till exempel f'_x :

$$\frac{\partial}{\partial u}f'_x(x,y) = f''_{xx}x'_u + f''_{xy}y'_u.$$

Man kan t.o.m. skriva detta utan att sätta ut vilken funktion man deriverar, dvs

$$\frac{\partial}{\partial u} = x'_u \frac{\partial}{\partial x} + y'_u \frac{\partial}{\partial y}.$$

Detta är **operator**notation. Den är praktisk och används ofta i övningsboken. Det är lätt att sätta in f, f'_x och f'_y, till exempel, i denna formel. Vi skriver $x'_u \frac{\partial}{\partial x}$ och inte $\frac{\partial}{\partial x} x'_u$ ty derivering är en operation som verkar endast åt höger, inom en term ("till närmaste plustecken"). Funktionen x'_u ska ju här inte deriveras m.a.p. x, så $\frac{\partial}{\partial x} x'_u$ vore missvisande.

Vi deriverar ofta m.a.p. x och y, vilket fungerar på samma sätt:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u,v) = f'_u u'_x + f'_v v'_x$$

och

$$\frac{\partial}{\partial y} f(u,v) = f'_u u'_y + f'_v v'_y,$$

med operatorsamband

$$\frac{\partial}{\partial x} = u'_x \frac{\partial}{\partial u} + v'_x \frac{\partial}{\partial v}$$

(derivering "via u" och " via v") och

$$\frac{\partial}{\partial y} = u'_y \frac{\partial}{\partial u} + v'_y \frac{\partial}{\partial v}.$$

I övrigt är grundregeln densamma för partiell derivering: derivera med avseende på en variabel, med alla vanliga deriveringsregler som derivering av produkt, kvot, osv., och behandla under denna derivering den andra variabeln som en ren konstant.

Vi ger härnäst två exempel där vi har (u, v) som funktion av (x, y) och tvärtom. Det blir typiskt något olika kalkyler i de två fallen.

Exempel 2 ***(uppgift 461k).*** *Transformera*

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}$$

med variabelbytet (koordinattransformationen)

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$$

Lösning: Vi har u och v som funktion av x och y, då vill vi helst derivera m.a.p. x och y. Det passar bra med att vi har derivator m.a.p. dessa variabler i uttrycket $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}$ som ska transformeras. Det är bara att derivera på.

Vi börjar med att beräkna förstaderivatorna: z'_x och z'_y.

Vi har här jacobianen

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix},$$

så vi har operatorsambanden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= u'_x \frac{\partial}{\partial u} + v'_x \frac{\partial}{\partial v} = y\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v} = y\frac{\partial}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= x\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Sätter vi in z i detta så har vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Alternativt kan man räkna med kedjeregeln utan operatorsamband, som ger (derivering "via u" och "via v"):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}u'_x + \frac{\partial z}{\partial v}v'_x = \frac{\partial z}{\partial u}y + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 0,$$

vilket naturligtvis är samma resultat (det är ett annat sätt att skriva samma kalkyl).

Nu har vi tredje termen i uttrycket $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}$ som vi ska transformera. Med $\frac{\partial}{\partial x}$ på $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ och med operatorsambanden (OS) igen så får vi de två övriga termerna:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y\frac{\partial z}{\partial u}\right] = \{y \text{ konstant under} \\ x\text{-deriveringen}\} &= y\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\right] = \{\text{OS}\} = yy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Och den sista termen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right] = \{\text{derivering av produkt} \\ \text{i första termen}\} &= \underbrace{1 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial u}\right]} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial v}\right] = \{\text{OS i båda termerna}\} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{y^2}y\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Ett y kan förkortas i sista termen. Insättning ger nu

$$\begin{aligned} x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} &= xy^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - y(\frac{\partial z}{\partial u} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}) + y\frac{\partial z}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}. \end{aligned}$$

Svar: Uttrycket $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}$ transformeras till $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Exempel 3 ***(uppgift 461l).*** *Transformera*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

med variabelbytet (koordinattransformationen)

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases}.$$

Lösning: Här har vi x och y som funktion av u och v, inte tvärtom. Här kan emellertid u och v lösas ut, ty om vi tar kvoten mellan sambanden elimineras u :

$$\frac{x}{y} = \frac{1-v}{v},$$

och vi får $v = \frac{y}{x+y}$ och $u = y/v = x + y$, alltså

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x+y} \end{cases}.$$

Det är fördelaktigt att ha enkla samband åt båda hållen. En genväg är i denna uppgift att observera att

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})z \\ &= (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})z. \end{aligned}$$

Vi kan nu välja mellan operatorsambanden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= x'_u\frac{\partial}{\partial x} + y'_u\frac{\partial}{\partial y} = (1-v)\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial v} &= x'_v\frac{\partial}{\partial x} + y'_v\frac{\partial}{\partial y} = -u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{(x+y)^2}\frac{\partial}{\partial v} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial u} + \frac{x}{(x+y)^2}\frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Enligt genvägen kan vi undersöka vad $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$är:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial u} - \frac{y}{(x+y)^2}\frac{\partial}{\partial v} - (\frac{\partial}{\partial u} + \frac{x}{(x+y)^2}\frac{\partial}{\partial v}) \\
&= (-\frac{y}{(x+y)^2} - \frac{x}{(x+y)^2})\frac{\partial}{\partial v} = \{\text{förenkling!}\} \\
&= -\frac{1}{x+y}\frac{\partial}{\partial v} \\
&= -\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Så genvägen ger

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})z &= -\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left[-\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}z\right] \\
&= \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}z
\end{aligned}$$

eftersom u är en konstant när vi deriverar m.a.p. v.Således transformeras $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ till det betydligt enklare

$$\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}z = 0.$$

Svar: Koordinattransformationen ger uttrycket $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

Vi tar ett tredje exempel där det inte går att lösa ut u och v. Vi är då än mer hänvisade till genvägar (observationer) liknande den vi använde i det förra exemplet.

Exempel 4 ***(uppgift 461r).*** *Transformera*

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

till polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}.$$

Lösning: Här kan vi inte på något effektivt sätt vända på sambanden, även om vi ibland kan använda att $r = \sqrt{x^2 + y^2} (\geq 0)$.

Man kan tycka att uttrycket

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

är en "jämn kvadrat", enligt

$$(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) z.$$

Låt oss derivera för att undersöka det. Vi får

$$\begin{aligned}
(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) z &= (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})(y z'_x - x z'_y) \\
\{\text{två termer}\} &= y \frac{\partial}{\partial x}(y z'_x - x z'_y) - x \frac{\partial}{\partial y}(y z'_x - x z'_y) \\
\{\text{derivering av produkter}\} &= (y^2 z''_{xx} - (y z'_y + y x z''_{xy})) - \\
&\quad -((y x z''_{xy} + x z'_y) - x^2 z''_{yy})) \\
&= y^2 z''_{xx} - 2yx z''_{xy} + x^2 z''_{yy} - y z'_y - x z'_x.
\end{aligned}$$

Så det var inte någon jämn kvadrat, vi fick även en term $-y z'_y - x z'_x$. Men det betyder givetvis att

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) z + (y \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial x}) z.$$

Kan vi finna $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ och $y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ med kedjeregeln? Operatorsambanden är här

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= x'_r \frac{\partial}{\partial x} + y'_r \frac{\partial}{\partial y} = \cos v \frac{\partial}{\partial x} + \sin v \frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial v} &= x'_v \frac{\partial}{\partial x} + y'_v \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin v \frac{\partial}{\partial x} + r \cos v \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Multiplicerar vi den första med r och använder koordinatsambanden så får vi

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial}{\partial r} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial v} &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Tydligen förekommer både $\frac{\partial}{\partial v}$ och $\frac{\partial}{\partial r}$. Så vi får

$$(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y})(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}) z + (y \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial x}) z = \frac{\partial^2}{\partial v^2} z + r \frac{\partial}{\partial r} z.$$

Svar: $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + r\frac{\partial z}{\partial r}$.

Koordinattransformation, kedjeregeln och

Vi har $T^{-1}(T\binom{x}{y}) = \binom{x}{y}$ – vi avbildar här med T från $\binom{x}{y}$ till $\binom{u}{v}$ och med T^{-1} tillbaka till $\binom{x}{y}$ igen. Första raden i denna relation är följande likhet:

$$x(u(x,y), v(x,y)) = x.$$

Om denna deriveras m.a.p. x så ger kedjeregeln

$$x'_u u'_x + x'_v v'_x = 1.$$

Variabelbytet har de två jacobianerna

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}, \text{ och } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix},$$

och vi kan observera att relationen $x'_u u'_x + x'_v v'_x = 1$ är elementet på rad 1 och kolonn 1 i matrislikheten

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = E.$$

Denna likhet gäller naturligtvis på andra platser också, det är resultatet om $T^{-1}(T\binom{x}{y}) = \binom{x}{y}$ deriveras m.a.p. x och sedan m.a.p. y. Nu ger determinantsatsen ($\det AB = \det A \det B$) att

$$\det J(T^{-1}) \cdot \det J(T) = 1$$

ty $\det E = 1$. Så om ytförstoringen är 5 från xy-planet till uv-planet ($\det J(T^{-1})$), så är den $1/5$ från uv-planet till xy-planet ($\det J(T)$). Självklart, men alltså bevisbart generellt, även om vi här inte alls har med fullständiga bevis. Från denna likhet följer också att determinanterna av jacobianerna inte får vara noll. Observera dock att polära koordinater har en jacobian (r) som är noll i en punkt: origo.

Exempel 5 *Kontrollera sambandet* $\det J(T^{-1}) \cdot \det J(T) = 1$ *för koordinattransformationen*

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases},$$

samt rita kurvskaror.

Detta är koordinatsambanden från Exempel 3. Vi kan från sambanden genast beräkna jacobianens determinant:

$$\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}\right| = (1-v)u - v(-u) = u.$$

Denna koordinattransformation kan inverteras, som vi såg i exemplet:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x+y} \end{cases} .$$

Det ger

$$\begin{aligned} \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{(x+y)^2} & \frac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}\right| = \frac{x}{(x+y)^2} - (-\frac{y}{(x+y)^2}) \\ &= \frac{x+y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y}. \end{aligned}$$

Sätter vi in $x + y = u$ så har vi alltså

$$\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = u \text{ och } \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| = \frac{1}{u},$$

så vi får mycket riktigt att

$$\det J(T^{-1}) \cdot \det J(T) = u \cdot \frac{1}{u} = 1.$$