Nr 9, 5 april -05, Amelia 2

9 Dubbelintegralens definition

9.1 Enkelintegralen

En ursprunglig tolkning av en enkelintegral är arean under dess graf – dvs arean mellan funktionsgrafen och x-axeln. Då räknas areor under (söder om) x-axeln negativt. Areor för rektanglar, som ju är basen gånger höjden, används för att definiera Riemannintegralen, som skissas härnäst.

9.1.1 Integrerbarhet

En begränsad funktion $f(x)$, definierad på ett intervall $[a, b]$, är integrerbar om den kan "godtyckligt noga" uppskattas med två styckevis konstanta funktioner[1] $u(x)$ och $ö(x)$. Här $u(x)$ är en underfunktion ($u(x) \leq f(x)$ överallt) och $ö(x)$ är en överfunktion ($ö(x) \geq f(x)$ överallt). Kravet för integrerbarhet (betydelsen av "godtyckligt noga") är att hur litet fel ε vi än kräver så finns det en underfunktion och en överfunktion till $f(x)$ så att arean mellan de två inte är större än ε. Samma sak i formler: för alla $\varepsilon > 0$ finns det styckevis kostanta funktioner $u(x)$ och $ö(x)$ så att $u(x) \leq f(x)$ överallt och $ö(x) \geq f(x)$ överallt så att

$$\int_a^b (ö(x) - u(x))dx < \varepsilon.$$

Här är $\int_a^b (ö(x) - u(x))dx$ lätt att definiera som arean av en samling rektanglar, eftersom $u(x)$ och $ö(x)$ är styckevis konstanta funktioner. Arean av en under- och överfunktion kallas en under- och översumma.

Integralen $\int_a^b f(x)dx$ definieras då som det tal som ligger mellan alla undersummor och alla översummor till $f(x)$. På grund av integrerbarheten, beskriven ovan, finns det bara ett sådant tal.

Eftersom arean mellan $u(x)$ och $ö(x)$ täcker grafen till f så kan man säga att integrerbarhet betyder att grafen till f ska kunna täckas av rektanglar som har hur liten total area som helst. Det är klart att man i allmänhet behöver en fin indelning och ett mycket stort antal små rektanglar för att uppnå en mycket liten sådan total area.

Man kan visa att alla begränsade kontinuerliga funktioner är integrerbara. Även alla styckevis kontinuerliga begränsade funktioner är integrerbara. Det är inget problem om funktionen gör hopp i vissa punker, ty arean över en punkt är noll, det är en rektangel med bredd noll. En mängd av en ändligt antal enstaka punkter är en **nollmängd**, det gör inget för integralens värde om vi ändrar funktionsvärdena på en nollmängd. Nollmängder inte är särskilt viktiga för enkelintegralen, men viktigare för dubbelintegralen.

[1] En funktion är styckevis konstant på intervallet $[a.b]$ om $[a, b]$ kan delas upp i ändligt många delintervall så att funktionen är konstant på varje delintervall.

En uppräknelig mängd punkter är också en nollmängd, men ett helt intervall $[a, b]$ av reella tal (om $a < b$) är inte uppräknelig, och inte en nollmängd (det finns dock överuppräkneliga nollmängder).

9.1.2 Räkneregler för integration

Från rektangelareorna som integration av styckevis konstanta funktioner svarar mot, ärver integralen ett antal räkneregler. Det finns många räkneregler (och därmed arbetssätt) som är användbara då en integral ska studeras.

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \qquad \text{(I1: linjaritet 1)}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(I2: linjaritet 2, horisontell uppdelning)

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \text{ om } f(x) \leq g(x) \text{ i } x \in [a, b]$$

(I3, monotonicitet)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

(I4, vertikal uppdelning)

Här är intuitiva tolkningar av dessa räkneregler:

1. Om vi multiplicerar alla rektanglars höjd med en kontant c, så multiplicerar vi den totala arean med en konstant c.
2. Om vi placerar två rektangelsamlingar ovanpå varandra ($f(x) + g(x)$) så är arean samma som om de beräknas var för sig.
3. Om vissa rektanglars höjd ökar, och ingen minskar, så ökar totala arean.
4. Arean från vänster fram till en viss punkt d plus återstoden av arean är lika stor som hela arean.

9.1.3 Riemannsummor

En Riemannsumma till en funktion $f(x)$ på $[a, b]$ behöver inte vara en under- eller översumma. Det är arean av en styckevis konstant funktion på $[a, b]$ vars höjd för varje delintervall är något funktionsvärde i delintervallet. Dess area är därför mellan varje under- och översumma, och konvergerar därmed mot $\int_a^b f(x)dx$ om indelningens finhet går mot noll. Gränsövergången är enklast om integrationsintervallet för Riemannsumman är indelad i lika stora delar. Om vi har n intervall har då varje delintervall längden $\frac{b-a}{n}$, och gränsövergången betyder att $n \to \infty$.

9.1.4 Areafunktioner och primitiva funktioner

Om man låter ena gränsen i en integral variera, vi kan kalla denna gräns x, så har vi en funktion av x, som kallas en **areafunktion** till den funktion som integreras. Alltså: $F(x) = \int_a^x f(y)dx$ är en areafunktion till $f(x)$. Man kan också definiera en **primitiv funktion** $F(x)$ till $f(x)$ som en funktion vars derivata är $f(x)$, dvs $F'(x) = f(x)$. Analysens huvudsats säger att om f är kontinuerlig och integrerbar, så är en areafunktion en primitiv funktion, dvs om $F(x) = \int_a^x f(y)dx$ så är deriverbar och $F'(x) = f(x)$. Denna sats gör att man kan konstruera regler för hur man bestämmer primitiv funktion till en funktion från deriveringsregler.

Standardderivator ger standardintegraler. Derivering av produkt ger upphov till partiell integration. Kedjeregelns motsvarighet är variabelsubstitution. I bevisen av partiell integration och variabelsubstitution är det bara att (pga analysens huvudsats) derivera integralerna, då satserna reduceras till derivering av produkt respektive kedjeregeln.

9.1.5 Generaliserade integraler

Om $f(x)$ är obegränsad i punkten b i intervallet $(a.b)$, eller om intervallet är obegränsat, i vilket fall b är ∞, så kan integralen definieras ändå i vissa fall. Detta är s.k. **generaliserade ingegraler**. En sådan integral är **konvergent** om gränsvärdet

$$\lim_{y \to b} \int_a^y f(x)dx$$

är konvergent, annars divergent. Man kan då exempelvis visa att

$$\int_1^\infty x^a dx$$

är konvergent om och endast om $a < -1$, och att

$$\int_0^1 x^a dx$$

är konvergent om och endast om $a > -1$. Så både $\int_1^\infty x^{-1}dx$ och $\int_0^1 x^{-1}dx$ är divergenta, ty $\ln x$ (primitiv funktion till x^{-1}) är obegränsad både då $x = 0$ och då $x \to \infty$. Man kan undersöka om andra generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta med jämförelsesatser för gränsvärden med andra integraler, varav $\int_1^\infty x^a dx$ och $\int_0^1 x^a dx$ är de viktigaste att jämföra med.

9.2 Dubbelintegralen

Vi har sett att en funktion $f(x, y)$ av två variabler, definierad i ett område $(x, y) \in D_f \subset \mathbf{R}^2$ kan tolkas som en yta. Då tolkas funktionsvärdet $f(x, y)$ som höjden i punkten (x, y). I parameterform är detta punkterna $(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3$, då $(x, y) \in D_f$. En naturlig fråga är hur stor volymen är för området mellan denna yta och xy-planet, dvs volymen av punktmängden

$$\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

om $f(x, y)$ är en positiv funktion. Analogt med enkelintegralen, så räknas volymer under xy-planet negativt.

Man kan konstruera dubbelintegralen som denna volym. Konstruktionen är analog till konstruktionen av enkelintegralen, men olika främst på ett sätt: geometrin i planet $\mathbf{R}^2$ kan vara väsentligt mer invecklad än i $\mathbf{R}$. För en enkelintegral lever integrationsintervallen på $\mathbf{R}$.

Beräkning av en dubbelintegral reduceras nästan alltid till att beräkna två enkelintegraler. Beräkningstekniken för enkelintegraler är därför helt fundamental för beräkning av dubbelintegraler.

9.2.1 Riemannsummor

En Riemannsumma för en funktion $f(x, y)$ i en rektangel $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \mathbf{R}^2$ är en indelning av rektangeln i disjunkta delrektanglar D_{kj} så att $\cup_{kj} D_{kj} = D$. Varje delrektangel D_{kj} har area $|D_{kj}|$ och definierar ett rätblock vars höjd är ett funktionsvärde i en punkt x_{kj} i rutan D_{kj}:

$$\sum_{k,j} f(x_k, y_j)|D_{kj}|$$

Om varje Riemannsumma konvergerar mot samma värde då indelningens finhet går mot noll, dvs arean av den största rutan i indelningen går mot noll, så är funktionen (Riemann-) integrerbar. Värdet av dubbelintegralen

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

är det värde som alla Riemannsummorna konvergerar mot. Vi illustrerar förfarandet med ett exempel.

Exempel 1 *(902) Ange en Riemannsumma för* $\iint_D xydxdy$ *då* $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, *där varje delruta har sida* $\frac{1}{n}$, *och beräkna dubbelintegralen genom att låta* $n \to \infty$.

Lösning: Här är $f(x, y) = xy$. Låt $x = k/n$, $k = 1, ..., n$ och $y = j/n$, $j = 1, ..., n$, så $f(x_k, y_j) = \frac{k}{n}\frac{j}{n}$. Varje ruta har area, så $|D_{kj}| = \frac{1}{n^2}$ för alla k och j. Då är en Riemannsumma

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{j}{n}\frac{1}{n^2}.$$

Denna kan delas upp i en produkt av två summor

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{j}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{n} j.$$

Använd nu att $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Summan $\sum_{j=1}^{n} j$ har givetvis samma värde. Det ger

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{j}{n} &= \frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{4}(\frac{n+1}{n})^2 \\ &= .\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^2 \end{aligned}$$

Låter vi $n \to \infty$ så får vi att $1 + \frac{1}{n} \to 1 + 0 = 1$. Så

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{j}{n}\frac{1}{n^2} \to \frac{1}{4} = \iint_D xydxdy.$$

Den sista likheten anger att dubbelintegralens värde är vad Riemannsummorna konvergerar mot.

Svar: $\iint_D xydxdy = \frac{1}{4}$.

Vilka funktioner är integrerbara? Först kan man visa att alla kontinuerliga och begränsade funktioner är integrerbara. Det spelar ingen roll för värdet på integralen $\iint_{D_f} f(x,y)dxdy$ om en värdena för f ändras på en delmängd av D_f som är en **nollmängd**. Funktionen måste därför inte vara kontinuerlig. En nollmängd i planet är en mängd som kan täckas över av rektanglar (eller cirklar) vars area är hur liten som helst.

Vi har hittills endast beaktat en rektangel i $\mathbf{R}^2$ som integrationsområde. Integralen över ett godtyckligt begränsat område D_f definieras som integralen över en rektangel som innehåller området och av den funktion som är $f(x,y)$ i D_f och 0 utanför D_f, men i rektangeln. Vi har garanterat inga problem om randen till D_f består av en mängd reguljära kurvor (kontinuerlig funktion $\overline{r}(t)$ med derivata $\overline{r}'(t)$ som existerar och är skild från nollvektorn i nästan alla punkter).

Man talar inte om primitiva funktioner till dubbelintegraler, bland annat för det inte finns något naturligt sätt att definiera areafunktion. Man kan också integrera m.a.p. två olika variabler.

Generaliserad dubbelintegral definieras på analogt sätt som generaliserad enkelintegral som ett gränsvärde då den problematiska delen av området är borttaget. Under gränsvärdet krymper den borttagna delen mot en nollmängd.

9.3 Beräkning av dubbelintegraler

9.3.1 Rektangulärt integrationsområde

Huvudberäkning för beräkning av en dubbelintegralen är s.k. upprepad integration. Vi integrerar "en variabel i taget". Vi kan beräkna volymen av en kropp genom att skiva den i tunna skivor, beräkna arean av varje skiva (första integrationen), och lägga ihop dem med en ny integrationsprocess (andra integrationen). I den första integrationen förekommer oftast den andra variabeln som en konstant under integrationen. Om $D_f = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ så betyder det de följande två enkelintegralerna:

$$\iint\limits_{D_f} f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

Här integreras alltså x först mellan a och b (inre integralen), och därefter y mellan c och d (yttre integralen). En alternativ möjlighet är i omvänd ordning:

$$\iint\limits_{D_f} f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx.$$

Skrivsättet

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

förekommer också för den itererade integralen $\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$.

Detta kan ha betydelse, för vissa integraler kan vi bara klara i den ena ordningen. Om båda vägarna är framkomliga ger de givetvis samma resultat: volymen under ytan.

Ibland skrivs en sådan integral som

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

Utan parentes brukar de första integrationsgränserna svara mot den första "dx". Med parentes (upprepad integration) skrivs således gränserna i motsatt ordning.

Exempel 2 *(901b) Beräkna* $\iint\limits_{D_f} (\sin x + y\cos x)dxdy$ *då* $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Lösning:

$$\iint\limits_{D_f} (\sin x + y\cos x)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + y\cos x)dx)dy.$$

Vi löser först den inre integralen, som är en vanlig enkelintegral där en konstant y får hänga med:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + y\cos x)dx &= [-\cos x + y\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \{\text{insättning av gränser}\} &= (-\cos\frac{\pi}{2} + y\sin\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0 + y\sin 0) \\ &= 0 + y + 1 + 0 = y + 1. \end{aligned}$$

Så att

$$\begin{aligned} \iint_{D_f} (\sin x + y\cos x)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y+1)dy \\ &= [\frac{1}{2}y^2 + y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Det ger samma resultat att integrera i motsatt ordning, och skriva allt i en kalkyl:

$$\begin{aligned} \iint_{D_f} (\sin x + y\cos x)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + y\cos x)dy)dx \\ \{y \text{ först, } x \text{ är konstant!}\} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y\sin x + \frac{1}{2}y^2\cos x]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}})dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}\sin x + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2\cos x)dx \\ & [-\frac{\pi}{2}\cos x + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= [-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2\sin\frac{\pi}{2}] - [-\frac{\pi}{2}\cos 0 + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2\sin 0] \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

9.3.2 Integrationsområden begränsade av kurvor

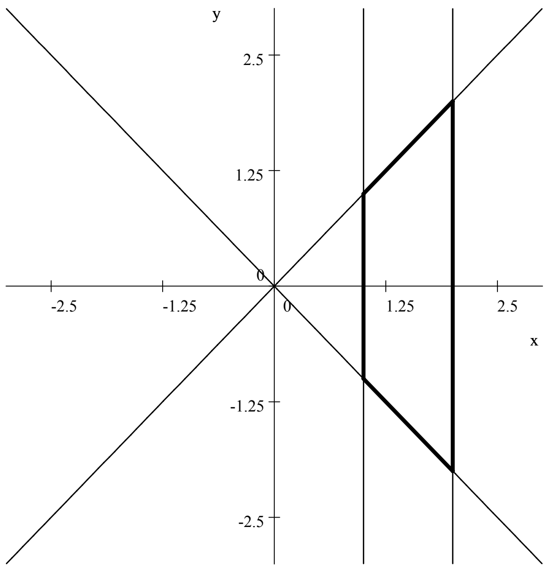
På ett område som i x-led begränsas av räta linjer x =konstant men i y-led begränsas av kurvor, som $D = \{a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$,kan vi göra den itererade integrationen i y-led först:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx.$$

Det finns givetvis motsvarande formel för integration i x-led först, på ett område av typen $D = \{\phi(y) \le x \le \psi(y), c \le y \le d\}$. Många integrationsområden kan delas upp i delar, där varje del är av en av dessa två typer.

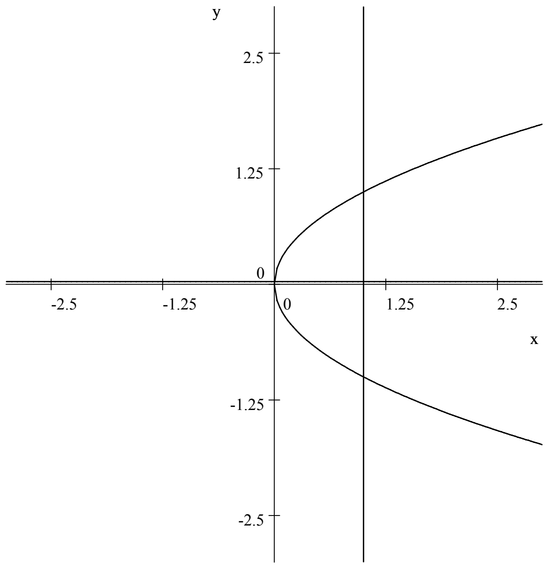
Exempel 3 *(904c) Över vilket område D kan den upprepade enkelintegralen $\int_1^2 dx \int_{-x}^{x} f(x,y)dy$ ses som integrationsområde för en dubbelintegral?*

Lösning: Vi har $\{1 \le x \le 2, -x \le y \le x\}$, så området är den fyrhörning som begränsas av fyra räta linjer på följande sätt:



Svar: Området begränsas av $y = -x$, $y = x$, $x = 1$ och $x = 2$.

Exempel 4 *(907b) Beräkna* $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x+2y} dxdy$ *då* $D = \{y^2 \le x \le 1, y \le 0\}$.



Eftersom gränserna i x beror på y kan det vara enklast att integrera x först. Vi får då (observera att under x-integrationen behandlas y som en konstant)

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{1+x+2y} dxdy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \frac{1}{1+x+2y} dx \\
&= \int_0^1 [\ln(1+x+2y)]_{y^2}^1 dy \\
&= \int_0^1 (\ln(2+2y) - \ln(1+y^2+2y)) dy \\
&= \int_0^1 (\ln 2(1+y) - \ln((y+1)^2)) dy \\
\{\text{logaritmlagar}\} &= \int_0^1 (\ln 2 + \ln(1+y) - 2\ln(y+1)) dy \\
&= \int_0^1 (\ln 2 - \ln(y+1)) dy = \{\text{partialint.}, \\
\int_0^1 1 \cdot \ln(y+1) dy\} &= \ln 2 - [(y+1)\ln(y+1)]_0^1 + \int_0^1 (y+1)\frac{1}{y+1} dy \\
&= \ln 2 - 2\ln 2 - 0 + 1 = 1 - \ln 2.
\end{aligned}
$$

Integralen kan också förmodligen beräknas med y-integration först. Man kan i alla fall skriva upp den itererade integralen:

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x+2y} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x+2y} dy.$$

Observera gränserna. De kan fås genom att studera figuren över integrationsområdet ovan. I y-led ska vi gå från kurvan $y = 0$ till $y = \sqrt{x}$. Därefter måste x gå från 0 till 1 för att få med hela detta område.

Svar: $1 - \ln 2$.