Nr 12, 12 april -05, Amelia 2

12 Dubbelintegraler: itererad integration och variabelsubstitution

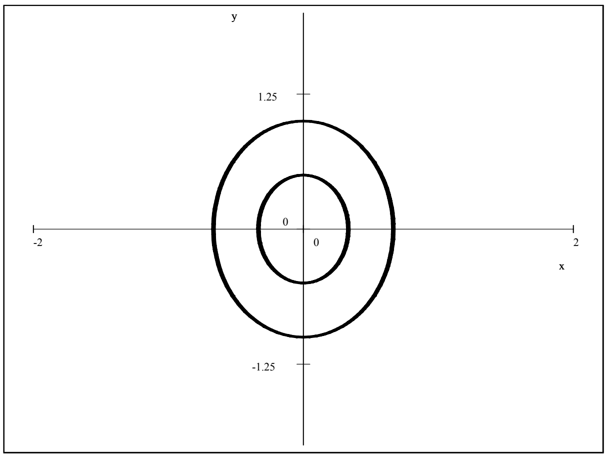
12.1 Itererad integration – ytterligare exempel

Exempel 1 *(920a) Beräkna* $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$ *om* $D = \{1 \le 9x^2 + 4y^2 \le 4\}$.

Lösning: Begränsningskurvan $1 = 9x^2 + 4y^2$ kan här skrivas som

$$1 = (\frac{x}{\frac{1}{3}})^2 + (\frac{y}{\frac{1}{2}})^2,$$

så det är en ellips med halvaxlar $\frac{1}{3}$ och $\frac{1}{2}$. Begränsningskurvan $4 = 9x^2 + 4y^2$ kan vi skriva som $1 = (\frac{x}{\frac{2}{3}})^2 + (\frac{y}{1})^2$ – här är halvaxlarna $\frac{2}{3}$ och 1. Vi har området mellan två ellipser.$4 = 9x^2 + 4y^2$



Detta område blir enkelt med elliptiska koordinater:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}r\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta \end{cases},$$

ty då svarar området mot $r = 1$ och $r = 2$. Det kan man se genom att sätta in dessa koordinatsamband i begränsningskurvornas ekvationer ovan. Gränserna i θ blir $\theta = 0$ till $\theta = 2\pi$. Emellertid blir inte integranden enkel här, som vi ska se senare.

Vi använder istället det andra alternativet, som är bra för integranden men inte så bra för området, nämligen polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

På kurvan $4 = 9x^2 + 4y^2$ har vi då $4 = 9r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta = 5r^2\cos^2\theta + 4r^2$ om vi använder $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Så här är $r = \frac{2}{\sqrt{5\cos^2\theta+4}}$. På $1 = 9x^2 + 4y^2$ får vi på liknande sätt $r = \frac{1}{\sqrt{5\cos^2\theta+4}}$. Alltså:

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt{5\cos^2\theta+4}}}^{\frac{2}{\sqrt{5\cos^2\theta+4}}} \frac{1}{r^4}rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}[-\frac{1}{2r^2}]_{\frac{1}{\sqrt{5\cos^2\theta+4}}}^{\frac{2}{\sqrt{5\cos^2\theta+4}}}d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}(5\cos^2\theta+4) - (5\cos^2\theta+4))d\theta \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(5\cos^2\theta+4)d\theta.
\end{aligned}$$

Nu ger

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

att

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(5\cos^2\theta+4)d\theta &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta + 4)d\theta \\
&= \frac{3}{8}\frac{13}{2}2\pi = \frac{39}{8}\pi
\end{aligned}$$

ty $\int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta = 0$, vi integrerar två hela perioder av $\cos 2\theta$.

Med elliptiska koordinater

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}r\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta \end{cases},$$

har vi följande funktionaldeterminant:

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\cos\theta & -\frac{1}{3}r\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2}r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\cos\theta r\cos\theta - (-\frac{1}{6}r\sin\theta)\sin\theta \\
&= \frac{1}{6}r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{1}{6}r.
\end{aligned}$$

Integranden blir:

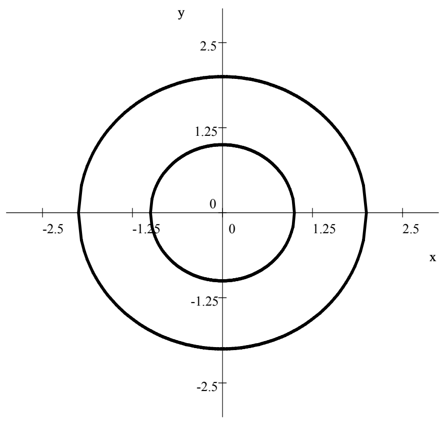
$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{1}{(9r^2\cos^2\theta+4y^2\sin^2\theta)^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{1}{(9\cos^2\theta+4\sin^2\theta)^2},\end{aligned}$$

som har en besvärligare nämnare. Den kan dock lösas med substitutionen $\tan\theta = t$.

Svar: $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \frac{39}{8}\pi.$

Exempel 2 *(920b) Beräkna* $\iint\limits_D \frac{1}{(9x^2+4y^2)^2}dxdy$ *om* $D = \{1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

Lösning: Här har vi området mellan två cirklar



Område begränsat av $1 = x^2+y^2$ och $4 = x^2+y^2$.

Vi såg i förra uppgiften att med elliptiska koordinater

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}r\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta \end{cases},$$

har vi funktionaldeterminanten

$$|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| = \frac{1}{6}r.$$

Den inre begränsningskurvan fås uttryckt i elliptiska koordinater genom insättning av koordinatsambanden:

$$\begin{aligned} 1 &= x^2+y^2 = \frac{1}{9}r^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}r^2\sin^2\theta = \{\text{trig. ettan}\} \\ &= r^2 + (\frac{1}{4}-\frac{1}{9})r^2\sin^2\theta = r^2(1+\frac{5}{36}\sin^2\theta),\end{aligned}$$

och $4 = r^2(1 + \frac{5}{36}\sin^2\theta)$ för den yttre gränsen. Gränserna är alltså $r = \frac{6}{\sqrt{5\cos^2\theta+36}}$ och $r = \frac{12}{\sqrt{5\cos^2\theta+36}}$ som i förra fallet, fast det är en annan substitution (och annat område – de två samspelar).

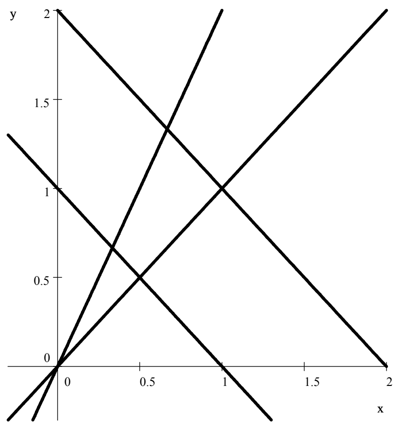
Observera också att $9x^2 + 4y^2 = r^2$ med dessa elliptiska koordinater. Vi får nu

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{1}{(9x^2+4y^2)^2}dxdy &= \iint\limits_E \frac{1}{r^4}\frac{1}{6}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{6}{\sqrt{5\cos^2\theta+36}}}^{\frac{12}{\sqrt{5\cos^2\theta+36}}} \frac{1}{r^3}\frac{1}{6}drd\theta\end{aligned}$$

som kan lösas med samma metod som i förra exemplet. Det ger

Svar: $\iint\limits_D \frac{1}{(9x^2+4y^2)^2}dxdy = \frac{13}{576}\pi.$

Exempel 3 *(921g) Beräkna* $\iint\limits_D \frac{1}{x^2}\ln\frac{y}{x}dxdy$ *om* $D = \{1 \le x+y \le 2, 1 \le \frac{y}{x} \le 2\}$.



Området $1 \le x+y \le 2$, och $1 \le \frac{y}{x} \le 2$.

Lösning: Området leder oss till substitutionen

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Vi har funktionaldeterminant

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2},$$

så

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x^2}{x+y},$$

Vi kan lösa ut x och y i termer av u och v. Det ger $xv = y$ insatt i $u = x + y = x + vx$, alltså $x = \frac{u}{v+1}$och $y = \frac{uv}{v+1}$.Så funktionaldeterminanten är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x^2}{x+y} = \frac{u}{(v+1)^2},$$

Vi får integralen

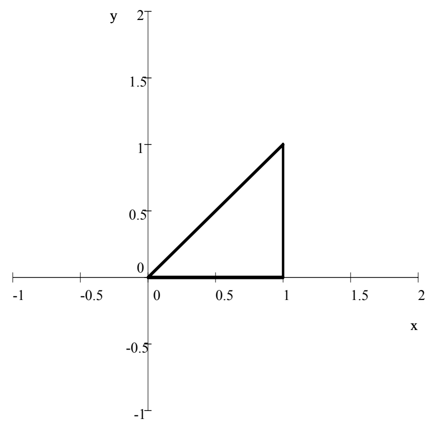
$$\begin{aligned} \iint\limits_D \frac{1}{x^2} \ln \frac{y}{x} dxdy &= \iint\limits_E \frac{(v+1)^2}{u^2} \ln v \frac{u}{(v+1)^2} dudv \\ &= \int_1^2 \frac{1}{u} du \int_1^2 \ln v dv = [\ln u]_1^2 [v(\ln v - 1)]_1^2 \\ &= \ln 2(2(\ln 2 - 1) - (\ln 1 - 1)) = \ln 2(2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_D \frac{1}{x^2} \ln \frac{y}{x} dxdy = \ln 2(2\ln 2 - 1)$.

Exempel 4 *(921g) Beräkna* $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy$ *om* D *är triangeln med hörn i* $(0,0)$, $(1,0)$ *och* $(1,1)$.

Lösning: Polära koordinater gör integranden lätt (observera funktionaldeterminanten r):

$$\frac{r}{(1+r^2)^2}.$$



Linjen $y = x$ svarar mot $\theta = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$ mot $\theta = 0$ och $x = 1$ ger $r \cos\theta = 1$. Integrerar vi r först får vi

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2} dr \\
& \int_0^{\frac{\pi}{4}} [-\frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2}]_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \frac{1}{1+(\frac{1}{\cos\theta})^2}) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 1}) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta + 1} d\theta
\end{aligned}$$

Denna enkelintegral kan vi klara genom att förlänga med $1/\cos^2\theta$ i rätt ögonblick så att man får $\tan\theta$ överallt, och sedan substituera $t = \tan\theta$. Då är $\theta = \arctan t$ och $d\theta = \frac{dt}{t^2+1}$. Det ger en rationell funktion att integrera.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta + 1} d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{2\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta \\
\{\text{förläng nu med } 1/\cos^2\theta\} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2\theta}{2+\tan^2\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+t^2}{2+t^2}\frac{1}{t^2+1} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2+t^2} dt = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt. \\
&= \frac{1}{4}[\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.