Nr 5, 1 mars -05, Amelia 2

5 Lokala och globala extremvärden

I en variabel inträffar lokala extremvärden i punkter där $f'(x) = 0$, om f är deriverbar och det inte är en randpunkt. Vilken typ av extremvärde det är kan ibland avgöras med andraderivatan: om $f''(x) > 0$ så har vi ett minimum, om $f''(x) < 0$ så har vi ett maximum. Typisk är här $f(x) = x^2$, som har $f'(x) = 2x = 0$ endast i origo, och $f''(x) = 2 > 0$. Det är mycket riktigt ett minimum i $x = 0$.

Men $f(x) = x^3$ och $f(x) = x^4$ har andraderivator som är noll i origo, då ger andraderivatan inte någon information. Detta kan även inträffa i flera variabler.

I flera variabler behöver vi alla andraderivator, varför den följande matrisen som består av just alla andraderivator är viktig.

5.1 Hessianen

Antag att $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$. Då är Hesses matris, eller hessianen, matrisen av alla *andra* ordningens derivator:

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}.$$

Om $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ är hessianen

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}.$$

Om $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ har hessianen på plats (i, j) elementet $f''_{x_i x_j}$. Som synes är hessianen normalt symmetrisk, eftersom

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j i x_i}$$

om de är kontinuerliga funktioner. Denna matris av andraderivator spelar en stor roll i detta avsnitt, när vi ska bestämma lokala extremvärden.

Hessianen bör inte förväxlas med jacobianen.

Jacobianen är matrisen av alla *första*derivator av en funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Hessianen är matrisen av alla *andra*derivator av en funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. Det är alltså två stora skillnader mellan jacobianen och hessianen. Det är möjligt att skriva Taylorpolynomet av andra graden med jacobianen och hessianen:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + (h, k) \cdot J_f + \frac{1}{2}(h, k) H_f \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

ty $J_f = \nabla f = (f'_x, f'_y)$ i detta fall. Vi återkommer till detta.

5.2 Lokala extremvärden

Taylorpolynomet av grad 1 är som vi sett tangentplanet. I detta avsnitt kommer vi att använda Taylorpolynomet av grad 2 för att bestämma lokala extremvärden.

Ett **maximum** har funktionen f i en punkt (x, y) om $f(x, y)$ är större ($\geq$) än alla värden i någon omgivning runt (x, y), dvs

$$f(x, y) \geq f(u, v)$$

för alla (u, v) (någon punkt i omgivningen) så att $|(x, y) - (u, v)| < r$ (omgivningen, en cirkel med radie r runt (x, y)) och $(x, y) \in D_f$ (punkterna måste över huvud taget ligga i definitionsmängden för f).

Vi har på analogt sätt ett **minimum** om $f(x, y) \leq f(u, v)$ gäller i en omgivning. Maximum och minimum kalla med ett ord lokala extremvärden. "Lokal", ty det handlar om *någon omgivning* till punkten.

Man talar också om ett **strängt maximum** och **strängt minumum** om vi har stränga olikheter: "$<$" i stället för "$\leq$" respektive "$>$" i stället för "$\geq$" i definitionen ovan.

5.2.1 Finns det extremvärden för ett plan?

En första fråga: har ett plan $f(x, y) = Ax + By + C$ några extermvärden? Ja, om $f(x, y) = C$, dvs om $A = B = 0$, så uppfyller alla punkter (x, y) ovanstående olikhet ($\geq$) med likhet ($=$). De uppfyller även den andra olikheten, så alla punkter på ett horisontellt plan är både lokala maximi- och minimipunkter. Detta är ett något urartat fall.

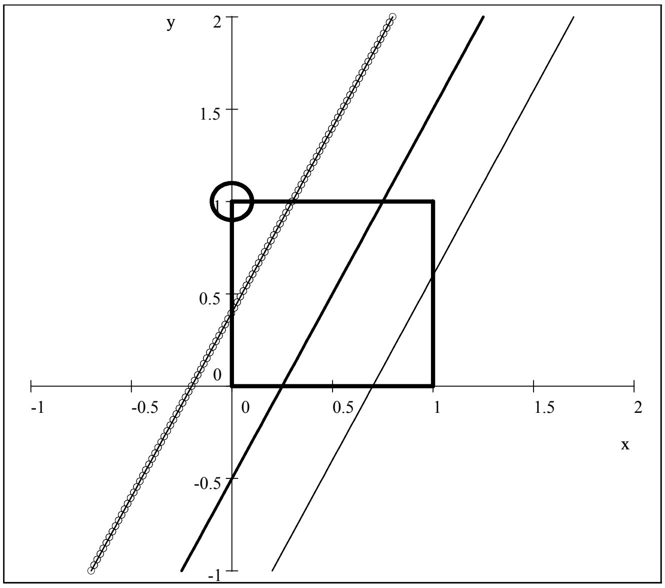
Om inte både A och B är noll så har planet inga extremvärden alls. Om $A > 0$ kan vi alltid få större värden genom att öka x-värdet, och mindre värden genom att minska x-värdet. Så vi har inget maximum eller minimum.

5.2.2 Extremvärden i randpunkter till D_f

Men om D_f är begränsad, så kan ett plan ha extremvärden. Betrakta

$$f(x, y) = 2x - y + 3$$

på rutan $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. I figuren nedan ser vi nivåkurvor – ju tjockare linje ju högre värde på $f(x, y)$.



Nivåkurvor till $f(x, y)$ i rutan $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Denna funktion har ett maximum i $(0, 1)$, på grund av att värdena (x, y) är begränsade till denna ruta. Detta är den första av tre typer av punkt där extremvärde kan inträffa. I detta fall inträffar det i en **randpunkt till D_f.**

5.2.3 Extremvärden i punkter där f inte är differentierbar

Den andra typen av extremvärde är i en **punkt där f ej är differentierbar**. I spetsen av en kon $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ är f inte deriverbar (prova partiella gränsvärden längs $y = 0$, där funktionen är $f(x, 0) = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$). Men här har vi ett lokalt minimum, ty $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ överallt, och $f(0, 0) = 0$.

5.2.4 Stationära punkter

Den tredje typen av extremvärde är den viktigaste typen. Den inträffar i det *inre* av D_f (inte på randen, det kanske t.ex. inte finns någon rand, som i Exempel 1 nedan) och i punkter där f är differentierbar (de flesta funktioner vi tittar på är differentierbara överallt). I en sådan punkt (x, y) måste båda partiella derivatorna vara noll, dvs

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 0 \text{ och} \\ f'_y(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

En sådan punkt kallas en **stationär punkt** till f, eller en **kritisk punkt**. Detta är den viktigaste typen.

Ty om någon partiell derivata inte är noll, säg att $f'_y(x, y) < 0$, så kan vi få något större värden i punkter $y = y - k$, om $k > 0$ är litet, och något mindre värden i punkter $y = y + k$ $k > 0$ är litet. Detta reduceras på detta sätt både till envariabelfallet och det linjära fallet, eftersom funktionen är lokalt som ett plan, om den är differentierbar.

Alla stationära punkter är inte nödvändigtvis extrempunkter – punkter där f har extremvvärden. Men vi kommer att finna alla extremvärden som inte inträffar på randen till området eller i icke-differentierbarhetspunkter om vi söker igenom alla punkter (x, y) som satisfierar $f'_x(x, y) = 0$ och $f'_y(x, y) = 0$.

Lösning av de två ekvationerna ger ett fåtal punkter. *Bland dessa punkter ligger nödvändigtvis extremvärdena*, utom randpunkter och icke-deriverbarhetspunkter

Här är ett mycket enkelt exempel:

Exempel 1 *Finn alla extremvärden för* $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Lösning: Funktionen är definierad på hela $\mathbf{R}^2$, så det kan inte finnas några extremvärden på randen. Den är differentierbar överallt. Så alla eventuella extremvärden är nödvändigtvis stationära punkter, dvs lösningar till

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 0 \text{ och} \\ f'_y(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x \text{ och} \\ f'_y(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

får vi ekvationerna

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0, \end{aligned}$$

med den enda lösningen $(x, y) = (0, 0)$. Eftersom $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ för alla (x, y) måste detta vara ett lokalt minimum.

Svar: $f(x, y) = x^2 + y^2$ har ett lokalt minimum i $(0, 0)$.

5.2.5 Andraderivator och extremvärden i två dimensioner

Hur avgör man om en stationär punkt är en extrempunkt? Det kan vi ofta göra genom att studera andraderivatorna. Låt oss skriva Taylorutvecklingen av $f(x, y)$ som

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + f'_x(x, y)h + f'_y(x, y)k + \\ &\quad \frac{1}{2}f''_{xx}(x, y)h^2 + f''_{xy}(x, y)hk + \frac{1}{2}f''_{yy}(x, y)k^2 + O((h^2 + k^2)^{3/2}), \end{aligned}$$

där $\frac{O((h^2+k^2)^{3/2})}{h^2+k^2} \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$. Dvs $O((h^2 + k^2)^{3/2}) \to 0$ snabbare än $h^2 + k^2$. Denna ekvation förenklar sig betydligt i en stationär punkt, där $f'_x(x, y) = 0$ och $f'_y(x, y) = 0$. Kvar blir då

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{1}{2}f''_{xx}(x, y)h^2 + f''_{xy}(x, y)hk + \frac{1}{2}f''_{yy}(x, y)k^2 + O((h^2+k^2)^{3/2}).$$

Med beteckningarna $A = f''_{xx}(x,y)$, $B = f''_{xy}(x,y)$ och $C = f''_{yy}(x,y)$,som är elementen i hessianen, får vi

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{1}{2}Ah^2 + Bhk + \frac{1}{2}Ck^2 + O((h^2+k^2)^{3/2}).$$

Eftersom $O((h^2 + k^2)^{3/2}) \to 0$ snabbare än $h^2 + k^2$ bestäms nu tecknet på skillnaden $f(x+h, y+k) - f(x,y)$ för små h och k av tecknet på

$$\frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2).$$

Observera att om

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) \geq 0$$

i en omgivning till (x,y),så har vi ett lokalt minimum i (x,y). Och om

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) \leq 0$$

i en omgivning till (x,y),så har vi ett lokalt maximum i (x,y).

Men denna skillnad är som vi såg lika med $\frac{1}{2}Ah^2 + Bhk + \frac{1}{2}Ck^2$ (bortsett från $O((h^2+k^2)^{3/2})$)

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{1}{2}Ah^2 + Bhk + \frac{1}{2}Ck^2 + O((h^2+k^2)^{3/2}),$$

där $O((h^2 + k^2)^{3/2})$ går mot noll så fort att den är försumbar vid sidan av $\frac{1}{2}Ah^2 + Bhk + \frac{1}{2}Ck^2$.

Således kan man avgöra om f har ett lokalt maximum eller minumum i en stationär punkt (x,y) genom att undersöka tecknet hos $\frac{1}{2}Ah^2 + Bhk + \frac{1}{2}Ck^2$. Men detta är $\frac{1}{2}$ gånger en kvadratisk form med hessianen i centrum:

$$(h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Vi har tidigare sett att om $AC - B^2 > 0$ är detta en paraboloid, och om $AC - B^2 < 0$ är det en hyperboloid. En hyperboloid har en riktning där funktionen är växande och en där den är avtagande, så i detta fall har vi inte något lokalt extremvärde. Är det en paraboloid så är det ett lokalt extremvärde (se Exempel 1, som är en paraboloid). Om $A > 0$ är denna uppåtvänd (som i Exempel 1) och vi har ett lokalt minimum. Är $A < 0$ så har vi ett lokalt maximum.

Om $AC - B^2 = 0$ så ger undersökning av andraderivatorna inte något resultat. Man får då andvända andra metoder, exempelvis genom att studera tredjederivator.

Exempel 2 *(801c) Bestäm lokala extremvärden till* $f(x,y) = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$.

Först bestämmer vi alla stationära punkter, dvs lösningar till $f'_x(x, y) = 0$ och $f'_y(x, y) = 0$. Här blir det ekvationerna

$$\begin{aligned} 6x^2 - 8x + 2y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $y = x$, insatt i den första ger

$$\begin{aligned} 6x^2 - 8x + 2x &= 0, \\ x(1 - x) &= 0, \end{aligned}$$

Så stationära punkter är $(0, 0)$ och $(1, 1)$ (använd att $y = x$). Vi undersöker dessa punkter i tur och ordning.

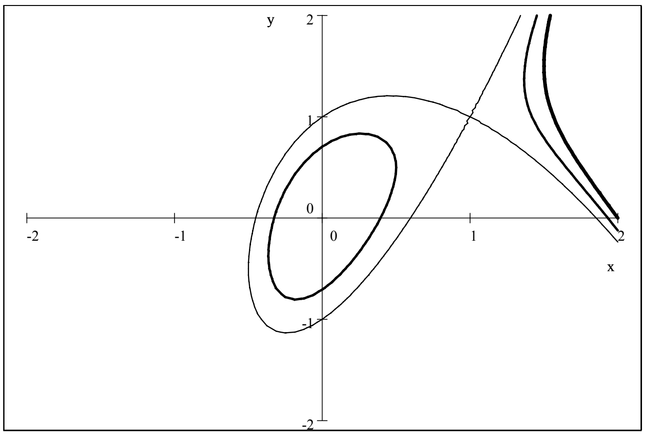
Andraderivatorna är

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx} = 12x - 8 \\ B &= f''_{xy} = 2 \\ C &= f''_{yy} = -2. \end{aligned}$$

Så i $(0, 0)$ får vi $AC - B^2 = -8 \cdot (-2) - 2^2 = 16 - 4 = 12$. Så vi har maximum eller minimum. $A = -8$ betyder att det är ett maximum.

I punkten $(1, 1)$ får vi $AC - B^2 = 4 \cdot (-2) - 2^2 = -8 - 4 = -12$. Så här har vi inte något maximum eller minimum.

Svar: $f(x, y)$ har maximum i $(0, 0)$.



Nivåkurvor $f(x, y) = -1$ (tunn), $= -0.5$ (medium), $= 0$ (tjock)

Från figuren kan vi utläsa att funktionen har värdet -1 på en kurva runt origo, men funktionen $2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ har uppenbarligen värdet 0 i origo (sätt in $x = 0$ och $y = 0$). Vi har därför ett maximum någonstans innanför öglan, och kalkylen visar att det är i origo.

I punkten $(1, 1)$ har funktionen värdet 1, och vi har en stationär punkt, men det finns riktningar som ger högre värden och riktningar som ger lägre. Detta kallas en **sadelpunkt**. Inget max eller min. En nivåkurva som skär sig själv brukar vara en sadelpunkt.

Exempel 3 *(801m) Bestäm lokala extremvärden till* $f(x,y) = \frac{1}{xy} + x + y$, $xy \neq 0$.

Här har vi undantagit koordinataxlarna, då får vi noll i nämnaren och f går mot oändligheten där. Stationära punkter:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0, \end{aligned}$$

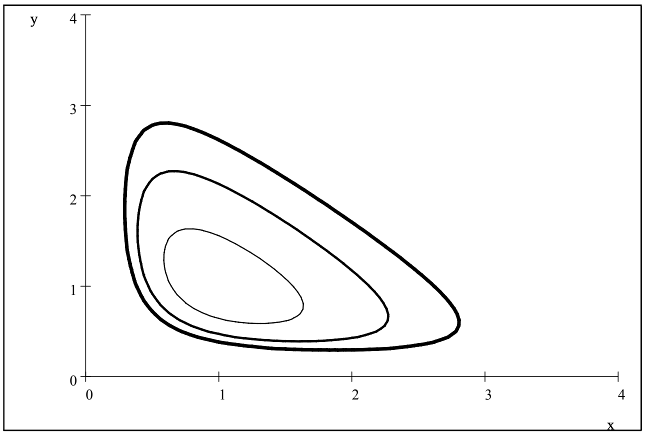
dvs

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2y} + 1 &= 0 \\ -\frac{1}{xy^2} + 1 &= 0, \end{aligned}$$

alltså $y = \frac{1}{x^2}$ som insatt i den andra ekvationen $1 = xy^2$ ger $x^3 = 1$. Enda lösningen är $x = 1$, som ger $y = 1$. Andraderivator är

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx} = \frac{2}{x^3y} \\ B &= f''_{xy} = \frac{1}{x^2y^2} \\ C &= f''_{yy} = \frac{2}{xy^3}, \end{aligned}$$

så $AC - B^2$ i punkten $(1,1)$ är $2 \cdot 2 - 1 = 3$. Eftersom $A = 2 > 0$ har vi ett lokalt minimum i $(1,1)$.



Nivåkurvor $f(x,y) = 3.2$ (tunn), $= 3.6$ (medium), $= 4$ (tjock)

Exempel 4 *(806b) Är det sant att* $2x^2 + 3y^2 + 4\sin x \sin y \geq 0$ *nära origo?*

Sätt $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 4\sin x \sin y$. Insättning visar att $f(0,0) = 0$. Så om det är sant så måste f ha ett lokalt minimum i (x,y). Det måste till att börja med vara en stationär punkt. Så $(0,0)$ måste satisfiera $f'_x = 0 = f'_y$, dvs

$$\begin{aligned} f'_x &= 4x + 4\cos x \sin y = 0, \\ f'_y &= 6y + 4\sin x \cos y = 0, \end{aligned}$$

som satisfieras av $(0,0,)$ (sätt in $x = 0$ och $y = 0$).

Vi har andraderivatorna

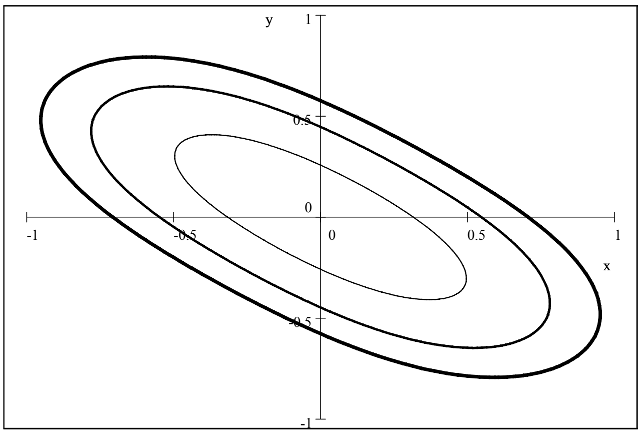
$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 4 - 4\sin x \sin y, \\ f''_{xy}(x,y) &= 0 + 4\cos x \cos y, \\ f''_{yy}(x,y) &= 6 - 4\sin x \sin y, \end{aligned}$$

så i $(0,0)$ får vi

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(0,0) = 4, \\ B &= f''_{xy}(0,0) = 4, \\ C &= f''_{yy}(0,0) = 6. \end{aligned}$$

Så $AC - B^2 = 24 - 16 = 8 > 0$, så, tillsammans med $A > 0$, gör att vi har ett minimum. Påståendet är sant.

Svar: ja.



Nivåkurvor $2x^2 + 3y^2 + 4\sin x \sin y = 1$ (tjock), $= 0.6$ (medel), $= 0.2$ (tunn).

Exempel 5 *(813)*

5.2.6 Matrisegenskaper: positivt definit, semidefinit och indefinit

Vi får alltså svar på våra frågor genom att studera $AC - B^2$, och eventuellt tecknet på A. Ett annat språkbruk för detta är att vår matris, hessianen, är positivt/negativt definit, positivt/negativt semidefinit och indefinit, som vi nu ska definiera. Om

$$(h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} > 0 \text{ för alla } (h,k) \text{ så att } (h,k) \neq 0$$

så är matrisen **positivt definit**. Den är **negativt definit** om vi byter "$>$" mot "$<$" i denna definition.

En matris är **positivt semidefinit** om

$$(h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \geq 0 \text{ för alla } (h,k).$$

Då tillåter vi att den kvadratiska formen $(h,k)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ är noll även om $(h,k) \neq 0$.

Om den kvadratiska formen vara både positiv och negativ för olika (h,k) så är den **indefinit**.

Vi kan knyta dessa egenskaper till hessianen H_f:s egenvärden λ_1, λ_2, på följande sätt:

1. $AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \Leftrightarrow H_f$ positivt definit $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow$ strängt minimum.
2. $AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \Leftrightarrow H_f$ negativt definit $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow$ strängt maxmum.
3. $AC - B^2 = 0 \Longleftarrow H_f$ positivt semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0 \Leftrightarrow$ extremvärde??
4. $AC - B^2 = 0 \Longleftarrow H_f$ negativt semidefinit $\Leftrightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 \leq 0 \Leftrightarrow$ extremvärde??
5. $AC - B^2 < 0 \Leftrightarrow H_f$ indefinit $\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2$ olika tecken $\Leftrightarrow$ ej extremvärde.

Notera att om hessianen är semidefinit så får vi ingen information om vi har ett lokalt extremvärde eller inte.

Eftersom matrisen är symmetrisk så är den diagonaliserbar. Genom ett basbyte får vi då

$$(h,k)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2.$$

Är t.ex. $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -5$ så kommer $(h,k) = (1,0)$ att ge värdet $\lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2 = 2$ men $(h,k) = (0,1)$ att ge värdet $\lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2 = -5$. Då är matrisen indefinit.

5.2.7 Extremvärden i tre dimensioner

I tre dimensioner får vi en hessian som är 3×3. Ett sätt att avgöra typen är att beräkna egenvärdena.

Exempel 6 *(813d) Bestäm alla lokala extremvärden till*

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + yz.$$

Stationära punkter:

$$\begin{aligned} f'_x &= 4x + 2y + 2z = 0 \\ f'_y &= 2y + 2x + z = 0 \\ f'_z &= 2z + 2x + y = 0. \end{aligned}$$

Vi får ett rent linjärt ekvationssystem, som har en lösning $(0, 0, 0)$. Är koefficientdeterminanten inte noll så är detta den enda lösningen. Vi får

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Så den enda stationära punkten är $(0, 0, 0)$. Men vad har vi för extremvärde, om vi har något?

Denna koefficientmatris råkar vara hessianen. Vi kan bestämma om vi har extremvärde genom att beräkna egenvärdena. Men detta visar sig bli en svår tredjegradsekvation. Det finns en annan väg, som är att kvadratkomplettera funktionens termer, en variabel i taget. Börja med x.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + yz \\ &= 2(x^2 + x(y + z)) + y^2 + z^2 + yz \\ &= 2(x^2 + xy + xz) + \frac{1}{4}(y + z)^2 - \frac{1}{4}(y + z)^2) + y^2 + z^2 + yz \\ &= 2(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{1}{2}yz \\ &= 2(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}(y^2 - \frac{2}{3}yz) + \frac{3}{4}z^2 \\ &= 2(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}(y^2 - \frac{2}{3}yz + \frac{1}{9}z^2 - \frac{1}{9}z^2) + \frac{3}{4}z^2 \\ &= 2(x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2})^2 + \frac{3}{4}(y - \frac{1}{3}z)^2 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{9})z^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Så funktionen är aldrig negativ och noll då $(0, 0, 0)$, vilket är den enda stationära punkten som vi såg ovan. Då har funktionen ett lokalt minimum i $(0, 0, 0)$.

Svar: Lokalt minimum i $(0, 0, 0)$.

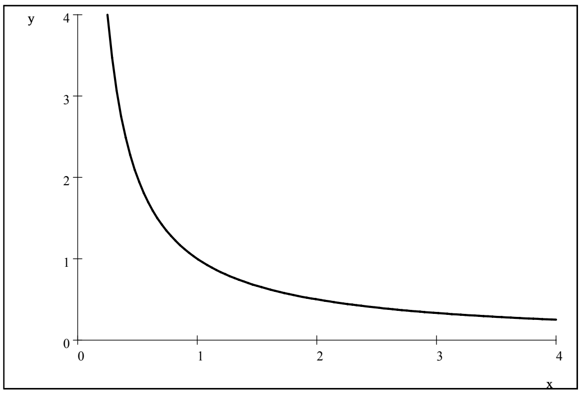
5.3 Globala extremvärden

De lokala extremvärdena är maxima eller minima i någon (liten) omgivning. Det största eller minsta värdet en funktion tar i hela sin defintionsmängd kallas ett **globalt extremvärde**. Funktionen $f(x,y)$ har alltså ett **globalt maximum** i (a,b) om

$$f(a,b) \geq f(x,y) \text{ för alla } (x,y) \in D_f.$$

Här är vi alltså intresserade av "för alla $(x,y) \in D_f$". Analogt har vi ett globalt minimum i (a,b) om $f(a,b) \leq f(x,y)$ gäller överallt i D_f.

Det existerar inte alltid största och minsta värde. Exempelvis har envariabelfunktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ varken största eller minsta värde. Den har inget största värde för den är inte uppåt begränsad ($\to \infty$). Den har inget minsta värde trots att den är nedåt begränsad, $f(x) > 0$ för alla $x \in D_f$. I vilket a man än tar så finns det ett b så att värdet är ännu mindre (jämför definition ovan).



Varken största eller minsta värde.

En metod för att bestämma ett globalt maximum är att helt enkelt beräkna alla lokala maxima och jämföra dem. Den största är det globala maximat och det minsta är det globala minimat. Som antyds av exemplet $\frac{1}{x}$ ovan ska man vara beredd på att det kanske inte finns något globalt max och min. Även randpunkter måste studeras om funktionens definitionsmängd har rand.

Exempel 7 *(840) Bestäm största och minsta värde för* $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$ *då* $x \geq 0$ *och* $y \geq 0$.

Vi har här rand och får dela in lösningen i flera delar. Vi letar efter kandidater till största och minsta värde.

A. Inre punkter: $x > 0$ **och** $y > 0$.
Här söker vi lokala max och min, som ges av

$$\begin{aligned} f'_x &= e^{-x^2-y^2} - 2x^2 e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y &= -2xye^{-x^2-y^2} = 0. \end{aligned}$$

Eftersom $e^{-x^2-y^2} > 0$ kan vi dividera med denna faktor, så vi får

$$\begin{aligned} 1-2x^2 &= 0 \\ xy &= 0. \end{aligned}$$

Båda ekvationerna måste (givetvis) vara uppfyllda. Alltså måste $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $y = 0$. Men det är en punkt som inte tillhör området, de inre punkterna. Således inga kandidater i det inre, inga lokala maxima eller minima här.

B. Randen $x = 0$ $y > 0$.
Detta ger $g(y) = f(0, y) = 0$. Detta är en kandidat.

C. Randen $y = 0$, $x > 0$.
Detta ger $g(x) = f(x, 0) = xe^{-x^2}$. Här söker vi min och max som i envariabelfallet: $g'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = 0$, dvs $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Detta ger kandidaten $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

D. Hörnet $x = y = 0$.
Här får vi väret $f(0, 0) = 0$.

Vi summerar, och jämför då alla kandidater: 0, $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ och 0. Eftersom $\max_{x^2+y^2=r} f(x, y) = r\cos ve^{-r^2} = re^{-r^2} \to 0$ då $r \to \infty$ så existerar det ett maximum. Obsevera också att $f(x, y) \geq 0$ i definitionsområdet (ty $x \geq 0$ där).
Svar: Minsta värde är 0 och största värde är $\frac{1}{\sqrt{2e}}$. Det antas i punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.