Nr 4, 28 feb -05, Amelia 2

4 McLaurin- och Taylorpolynom

4.1 Repetition av Taylorpolynom i en variabel

4.1.1 Förbättring av tangenten

Detta avsnitt handlar om de grundläggande idéerna för Taylorpolynom i en variabel. Idéerna är nästan samma för flera variabler, bara svårare att överblicka på grund av att formlerna blir längre.

I en variabel är som bekant $y(x)$ en tangent till en deriverbar funktion $f(x)$ i punkten a om:

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Funktionen $y(x)$ är mycket nära $f(x)$ nära punkten a, på så sätt att de två funktionerna har samma värde och samma derivata i punkten: $f(a) = z(a)$ och $f'(a) = z'(a)$. Däremot kan $f''(a)$ och $z''(a)$ vara olika.

Men om vi lägger till en term till så får vi även $f''(a) = z''(a)$. Då ska vi faktiskt lägga till $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$. Det ger

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

Genom att derivera $z(x)$ två gånger och sätta in $x = a$ kan man lätt övertyga sig om att $f''(a) = z''(a)$, och att $f(a) = z(a)$ och $f'(a) = z'(a)$ fortfarande gäller. För att detta ska vara möjligt måste f vara två gånger deriverbar i punkten (så $f''(a)$ finns).

Vi kan fortsätta på detta sätt. Om f är tre gånger deriverbar i $x = a$ behöver vi en term $\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$, då kommer funktionen

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

att uppfylla $f(a) = z(a)$, $f'(a) = z'(a)$, $f''(a) = z''(a)$ och $f'''(a) = z'''(a)$ – *alla* derivator upp till tredje ordningen överensstämmer. Man kan lätt kontrollera genom att derivera och sätta in $x = a$.

Det visar sig att ju fler derivator som överensstämmer i punkten $x = a$, ju större är det intervall runt a, säg intervallet $[a-R, a+R]$, där $y(x)$ är en god approximation till $f(x)$ (se nedanstående exempel med $\sin x$ runt $x = 0$)

Notera att de olika varianterna av $y(x)$ ovan alla är *polynom* av allt högre grad, och alla derivator överensstämmer med derivatorna till $f(x)$ i punkten $x = a$. Dessa polynom kallas **Taylorpolynom** till $f(x)$ i punkten a. Vi får ett Taylorpolyom med högre gradtal, och en bättre approximation, genom att lägga till nästa term i **Taylorserien**, som är följande serie:

$$\begin{aligned} & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + ... \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k. \end{aligned}$$

I Taylorserien har vi alltså med oändligt många termer, och vi får ett Taylorpolynom genom att stryka alla termer över ett visst gradtal. Stryker vi alla termer av grad 2 och högre får vi alltså funktionens tangent i punkten – den punkt där argumentet i detta avsnitt startade.

Symbolen $f^{(k)}$ betyder förstås derivata av ordning k :

$$f^{(k)}(a) = \frac{d^k f}{dx^k}(a),$$

så $f^{(2)}(a) = f''(a)$, till exempel.

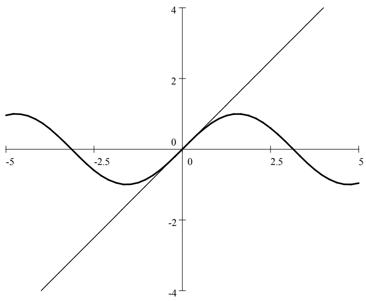
4.1.2 McLaurinserie

I specialfallet $a = 0$ talar man om en **McLaurinserie**:

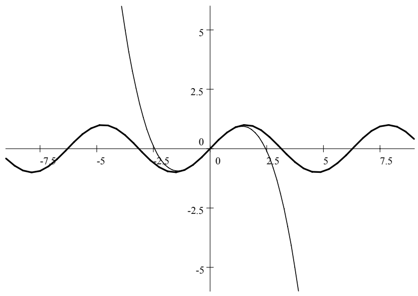
$$\begin{aligned} & f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + ... \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k. \end{aligned}$$

Just som för Taylorpolynom får vi ett **McLaurinpolynom** om vi trunkerar serien (tar bort alla termer från ett visst k och uppåt).

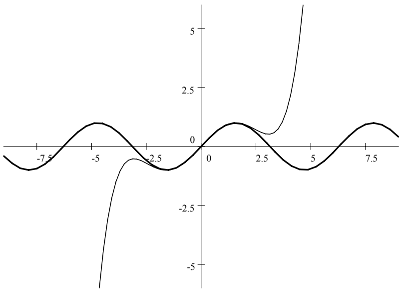
Här nedan följer en följd McLaurinpolynom till $f(x) = \sin x$, som illustrerar hur approximationen blir allt bättre när vi tar med fler termer. Figurerna visar $\sin x$ och dess McLauringpolynom av gradtal 1, 3, 5, 7 och 39.



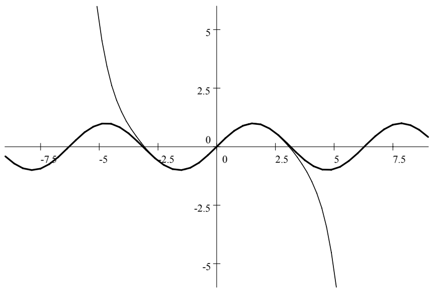
x (tunn), tangenten till $\sin x$ (tjock) i $x = 0$



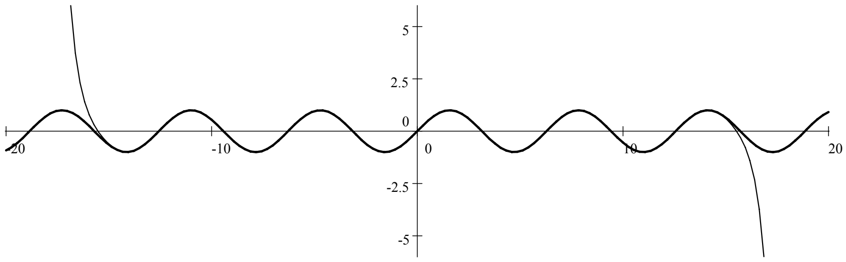
$x - \dfrac{x^3}{6}$ (tunn) och $\sin x$ (tjock).



$\sin x$ (tjock) och $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ (tunn).



$\sin x$ och $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$.



$\sin x$ (tjock) och $\sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$ (tunn).

Med gradtal 39 svänger polynomet som synes mycket nära funktionen $\sin x$ – i mer än fyra perioder av $\sin x$. De sammanfaller ungefär i intervallet $(-15, 15)$. Med högre gradtal skulle vi få överensstämmelse i ett ännu större intervall.

Det går bra att göra denna konstruktion ty $\sin x$ är 39 gånger deriverbar. Funktionen $\sin x$ är t.o.m. **oändligt deriverbar**, vilket definitionmässigt betyder att $\frac{d^k}{dx^k} \sin x$ är kontinuerlig för alla naturliga tal k, och för alla x.

4.1.3 Intervallstorlek och restterm

Kan vi avgöra hur stort intervall de två överensstämmer? Vi vill då uppskatta felet

$$\max_{x \in I} |f(x) - p_n(x)|,$$

där $p_n(x)$ är Taylorpolynomet av grad n till $f(x)$, och I är det intervall vi är intresserade av. Vi kommer att betrakta intervall runt 0 av längd $2R$, alltså $I =]-R, R[$. Det visar sig att felet kan uppskattas med nästa derivata ($f^{(n+1)}$), på följande sätt:

$$\max_{x \in I} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [-R,R]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Man kan visa detta med upprepad partiell integration, vi utför detta för $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0)+\int_0^x f'(y)dy = f(0)+\int_0^x 1\cdot f'(y)dy = \{\text{PI}\} \\
&= f(0)+[(y-x)\cdot f'(y)]_0^x - \int_0^x (y-x)\cdot f''(y)dy = \{\text{insättning av} \\
\text{gränser}\} &= f(0)+0\cdot f'(x)-(-x)f'(0)-\int_0^x (y-x)\cdot f''(y)dy = \{\text{PI}\} \\
&= f(0)+xf'(0)-[\frac{1}{2}(y-x)^2\cdot f''(y)]_{y=0}^{y=x}+\int_0^x \frac{1}{2}(y-x)^2 f'''(y)dy \\
&= f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2 f''(0)+\int_0^x \frac{1}{2}(y-x)^2 f'''(y)dy.
\end{aligned}
$$

Avvikelsen mellan $f(x)$ och $f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)$ är således

$$\int_0^x \frac{1}{2}(y-x)^2 f'''(y)dy.$$

Denna storhet är maximalt

$$
\begin{aligned}
|\int_0^x \frac{1}{2}(y-x)^2 f'''(y)dy| &\le \frac{1}{2}\int_0^x (y-x)^2|f'''(y)|dy \\
\{|f'''(y)| &\le \max|f'''(y)|\} \le \frac{1}{2}\max|f'''(y)|\int_0^x (y-x)^2 dy \\
&= \frac{1}{2}\max|f'''(y)|\frac{x^3}{3}.
\end{aligned}
$$

I intervallet $[-R,R]$ är detta maximalt om $x=R$,så vi har

$$\max_{x\in I}|f(x)-p_2(x)| \le \max_{x\in[-R,R]}|f^{(3)}(x)|\frac{R^3}{3!}.$$

För $f(x)=\sin x$ vet vi att $\max_{x\in[-R,R]}|f^{(n+1)}(x)|\le 1$ (eftersom alla derivator av $\sin x$ är $\pm\sin x$ eller $\pm\cos x$, så är värdet av $|f^{(n+1)}(x)|$ högst 1) så om felet ska vara högst 0.1 så får vi kravet

$$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\le 0.1,$$

dvs vi har ett krav på R :

$$R\le \sqrt[n+1]{0.1(n+1)!}.$$

Man kan beräkna att $\sqrt[40]{0.1\cdot 40!}=14.886$, vilket stämmer utmärkt med vad vi kunde se i figuren (ögonmått gav 15). Obervera att $40! = 8.16\times 10^{47}$ är ett gigantiskt stort tal.[1]

[1] Stirlings formel säger $n!\approx(\frac{n}{e})^n$, så $\sqrt[n]{n!}\approx[(\frac{n}{e})^n]^{\frac{1}{n}}=\frac{n}{e}$. Det stämmer bra här ty $\frac{40}{e}\approx 14.715$ och intervallens längd ökar ungefär linjärt med McLaurinpolynomets gradtal.

Man kan skriva detta som att

$$f(x) = p_n(x) + O(x^{n+1}),$$

vilket betyder att skillnaden $f(x) - p_n(x)$ går mot noll minst som Cx^{n+1} då $x \to 0$. Detta kan också sägas som att $(f(x) - p_n(x))x^{-n-1}$ är en begränsad funktion nära 0.

4.2 Taylorpolynom i n variabler

4.2.1 Två variabler

Betrakta grafen av en funktion $f(x, y)$, dvs planet $z = f(x, y)$ som en yta i $\mathbf{R}^3$. Funktionen är differentierbar i en punkt (a, b) om det finns konstanter A och B så att det finns ett plan $z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ som är en mycket bra approximation till $f(x, y)$ nära (a, b). Nämligen så bra att

$$|f(x, y) - (f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}\rho(x - a, y - b)$$

där $\rho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$. Faktorn $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ går mot noll, och faktorn ρ gör att $f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ approximerar $f(x, y)$ ännu bättre än något annat plan genom punkten. Då är $A = f'_x(a, b)$ och $B = f'_y(a, b)$, och planet är givetvis tangentplanet

$$z(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Vi kan också tala som de två funktionerna $f(x, y)$ och $z(x, y)$, där $z_1(x, y) =$

$f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$ ju är ett förstagradspolynom i två variabler, som är mycket nära varandra nära punkten (a, b), om f är differentierbar i denna punkt. Funktionen $z(x, y)$ går genom (a, b) ty sätter vi in $x = a$ och $y = b$ så får vi

$$z(a, b) = f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot 0 + f'_y(a, b) \cdot 0 = f(a, b),$$

och $z(x, y)$ har även samma partiella derivator som $f(x, y)$ i (a, b), ty om vi deriverar $z(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$ partiellt m.a.p. x så får vi

$$z'_x(x, y) = 0 + f'_x(a, b) \cdot 1 + 0,$$

och sedan sätter in (a, b):

$$z'_x(a, b) = f'_x(a, b).$$

På samma sätt kan man kontrollera att $z'_y(a, b) = f'_y(a, b)$.

Med ett Taylorpolynom kan man hitta en yta som anpassar sig ännu bättre än ett plan till f. Tangentplanet $z(x, y)$ är Taylorpolynomet av grad ett (om inte $f'_x(a, b)$ och $f'_y(a, b)$ båda är noll, då det har lägre grad), vi kan beteckna det med $z_1(x,y)$. Man får Taylorpolynomet av grad 2 genom att lägga till andragradstermer. Det ser ut som följer:

$$\begin{aligned}
z_2(x,y) &= f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) \\
&\quad + \frac{1}{2} f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f''_{yy}(a,b)(y-b)^2.
\end{aligned}$$

Funktionen $z_2(x,y)$ är (i allmänhet) inte ett plan, utan en andragradsuttryck. Eftersom z^2 inte förekommer är det en elliptisk eller hyperboloidisk paraboloid, eller en parabolisk cylinder.

Men varför ser andragradstermerna ut just på detta sätt:

$$\frac{1}{2} f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f''_{yy}(a,b)(y-b)^2?$$

Svaret är att f och z har samma värde i punkten (a,b) och *samma partiella derivator av alla ordningar t.o.m. 2.* Det är klart att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} z_2(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}[f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) \\
&\quad + \frac{1}{2} f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f''_{yy}(a,b)(y-b)^2] \\
&= f'_x(a,b) + 0 + f''_{xx}(a,b)(x-a) + f''_{xy}(a,b)(y-b),
\end{aligned}$$

så om vi sätter in $(x,y) = (a,b)$ får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_2}{\partial x}(a,b) &= f'_x(a,b) + 0 + f''_{xx}(a,b)(a-a) + f''_{xy}(a,b)(b-b) \\
&= f'_x(a,b),
\end{aligned}$$

så även funktionerna f och z_2 har samma partiella derivator av ordning ett i punkten (a,b). Vi kontrollerar härnäst f''_{xx} och f''_{xy} :

$$\begin{aligned}
z''_{2xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}[f'_x(a,b) + f''_{xx}(a,b)(x-a) + f''_{xy}(a,b)(y-b)] \\
&= f''_{xx}(z,b)
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
z''_{2xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}[f'_x(a,b) + f''_{xx}(a,b)(x-a) + f''_{xy}(a,b)(y-b)] \\
&= f''_{xy}(z,b).
\end{aligned}$$

Det följer att $z''_{2xx}(a,b) = f''_{xx}(z,b)$ och $z''_{2xy}(a,b) = f''_{xy}(z,b)$. På samma sätt kan vi visa att $z''_{2yy} = f''_{yy}$ i punkten (z,b). Vi ska se senare att om vi lägger till termen

$$\frac{1}{6}(f'''_{xxx}(a,b)(x-a)^3 + 3f'''_{xxy}(a,b)(x-a)^2(y-b) + f'''_{xyy}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + f'''_{yyy}(a,b)(y-b)^3)$$

till $z_2(x,y)$ så får vi $z_3(x,y)$ som har samma partiella derivator som $f(x,y)$ upp t.o.m. ordning 3. Det är inte svårt att derivera detta polynom tre gånger och kontrollera de partiella derivatorna. Detta är Taylorpolynomet till $f(x,y)$ av ordning 3.

Vi tittar nu på ett något annorlunda sätt att beskriva Taylorpolynom. Om vi nu byter variabler, byt (x,y) mot $(x+h, y+k)$ och (a,b) mot (x,y), så kan z_2 skrivas

$$z_2(x+h,y+k) = f(x,y)+f'_x(x,y)h+f'_y(x,y)k+\frac{1}{2}f''_{xx}(x,y)h^2+f''_{xy}(x,y)hk+\frac{1}{2}f''_{yy}(x,y)k^2.$$

Notera att

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) &= f'_x(x,y)+f'_y(x,y) \text{ och}\\
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) &= f''_{xx}(x,y)+2f''_{xy}(x,y)+f''_{yy}(x,y), \text{ och}\\
\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y) &= f'''_{xxx}(x,y)+3f'''_{xxy}(x,y)+3f'''_{xyy}(x,y)+f'''_{yyy}(x,y).
\end{aligned}$$

Alltså kan man skriva z_2 som

$$z_2(x+h,y+k) = f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y).$$

Det är klart att vi även kan tala om Taylorpolynom av grad 3, som blir

$$\begin{aligned}
z_2(x+h,y+k) &= f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)+\\
&\quad +\frac{1}{6}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y),
\end{aligned}$$

helt analogt med envariabelfallet. Generellt får vi Taylorpolynomet av grad n som

$$z_2(x+h,y+k) = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x,y).$$

Detta är inte säkert helt korrekt på så sätt att gradtalet är inte n, utan lägre än n, om $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)=0$. Exemplet $\sin x$ ovan, i envariabelfallet, har inget McLaurinpolynom av grad 2 eftersom $f''(0)=\sin 0=0$.

4.2.2 Tre variabler

I tre variabler får vi på analogt sätt

$$z_2(x+h, y+k, z+l) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z} \right)^i f(x,y,z).$$

Taylorpolynomet av grad 3, exempelvis, är då utskrivet som följer:

$$\begin{aligned} z_2(x+h, y+k, z+l) &= f(x,y,z) + f'_x(x,y,z)h + f'_y(x,y,z)k + f'_z(x,y,z)l + \\ &+ \frac{1}{2} f''_{xx}(x,y,z)h^2 + \frac{1}{2} f''_{yy}(x,y,z)k^2 + + \frac{1}{2} f''_{zz}(x,y,z)l^2 \\ &+ f''_{xy}(x,y,z)hk + f''_{xz}(x,y,z)hl + f''_{yz}(x,y,z)kl. \end{aligned}$$

Man kan kontrollera detta genom derivering – att se att z_2 och f har samma partiella derivator i (x,y) upp till ordning 2.

Exempel 1 *(701b) Bestäm McLaurinpolynomet av andra graden till* $e^{xy}\cos(x+y)$.

Vi använder här envariabelutvecklingarna

$$\begin{aligned} e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \text{ och} \\ \cos x &\approx 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Insättning ger

$$\begin{aligned} e^{xy} &\approx 1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2, \text{ och} \\ \cos(x+y) &\approx 1 - \frac{1}{2}(x+y)^2, \end{aligned}$$

och vi får

$$\begin{aligned} e^{xy}\cos(x+y) &\approx (1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2)(1 - \frac{1}{2}(x+y)^2) = \\ &= 1 + xy - \frac{1}{2}(x+y)^2 + ... \\ &= 1 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + ... \end{aligned}$$

Alla termer av högre grad än 2 representeras av "...".

Svar: McLaurinpolynomet är $1 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Exempel 2 *(702c + approximation) Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till* $f(x,y) = \sqrt{y - x + \sin(2x - y)}$ *i punkten* $(1,2)$. *Vad är* $f(0.9, 2.1)$, *approximativt?*

Man kan antingen beräkna alla värden $f(1,2)$, $f'_x(1,2)$, $f'_y(1,2)$, $f''_{xx}(1,2)$, $f''_{xy}(1,2)$ och $f''_{yy}(1,2)$, eller beräkna McLaurinpolynomet till

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(x+1,y+2) = \sqrt{(y+2)-(x+1)+\sin(2(x+1)-(y+2)} \\ &= \sqrt{y-x+1+\sin(2x-y)}. \end{aligned}$$

Vi har envariabelutvecklingar

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2, \\ \sin x &\approx x-\frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Så vi har

$$\sin(2x-y) \approx 2x-y-\frac{1}{6}(2x-y)^3,$$

och insättning av $y-x+2x-y-\frac{1}{6}(2x-y)^3 = x-\frac{1}{6}(2x-y)^3$ i utvecklingen av $2x-y-\frac{1}{6}(2x-y)^3$ ger

$$\begin{aligned} \sqrt{y-x+1+\sin(2x-y)} &\approx 1+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}(2x-y)^3) \\ &\quad -\frac{1}{8}(x-\frac{1}{6}(2x-y)^3)^2 \\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+... \end{aligned}$$

Termen $\frac{1}{6}(2x-y)^3$ behöver inte tas med för den är av ordning 3.

Vi får nu $f(x,y)=g(x-1,y-2)$ som $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$.

Approximation med Taylorpolynomet ger

$$f(0.9,2.1) \approx 1+\frac{1}{2}(0.9-1)-\frac{1}{8}(0.9-1)^2 = 0.948\,75.$$

Svar: Taylorpolynomet av grad 2 är $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$, och $f(0.9,2.1) \approx 0.948\,75$.

Vilket fel har en Taylorutveckling? Jo,

$$f(x+h,y+k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x,y) + O((\sqrt{h^2+k^2})^{n+1}).$$

Felet är $O((\sqrt{h^2+k^2})^{n+1})$. Man säger att felet är av ordning $n+1$.

Exempel 3 *(710) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 till den funktion* $z(x,y)$ *som defineras av* $z^3-2xz+y=0$, *i punkten* $(1,1,1)$.

Implicit derivering m.a.p. x ger

$$3z^2 z'_x(x,y) - 2z(x,y) - 2xz'_x(x,y) + 0 = 0,$$

som insatt $(1,1,1)$ ger

$$3z'_x(1,1) - 2 - 2z'_x(1,1) = 0,$$

dvs $z'_x(1,1) = 2$. Deriverar vi ekvationen ovan igen m.a.p. x så får vi

$$6z(x,y)z'_x(x,y)^2 + 3z^2 z''_{xx}(x,y) - 2z'_x(x,y) - 2z'_x(x,y) - 2xz''_{xx}(x,y) = 0.$$

Vid insättning av $(1,1,1)$ känner vi nu $z'_x(1,1) = 2$, så vi kan bestämma $z''_{xx}(1,1)$:

$$24 + 3z''_{xx}(1,1) - 4 - 4 - 2z''_{xx}(1,1) = 0,$$

dvs $z''_{xx}(1,1) = -16$.

Nu ger derivering m.a.p. y

$$3z^2 z'_y(x,y) - 2xz'_y(x,y) + 1 = 0,$$

och vi får $z'_y(1,1) = -1$.

Deriverar vi denna ekvation m.a.p. x så får vi tag på $z''_{xy}(1,1)$. Deriveringen ger

$$6z(x,y)z'_x(x,y)z'_y(x,y) + 3z^2 z''_{yx}(x,y) - 2z'_y(x,y) - 2xz''_{yx}(x,y) + 0 = 0$$

så med $z'_x(1,1) = 2$ och $z'_y(1,1) = -1$ får vi

$$-12 + 3z''_{yx}(1,1) + 2 - 2z''_{yx}(1,1) + 0 = 0$$

och $z''_{yx}(1,1) = 10$.

Deriverar vi den y-deriverade ekvationen en gång till m.a.p. y så fås

$$6z(x,y)z'_y(x,y)^2 + 3z^2 z''_{yy}(x,y) - 2xz''_{yx}(x,y) = 0,$$

och insättning av $(1,1,1)$ och $z'_x(1,1) = 2$ och $z'_y(1,1) = -1$ ger nu

$$6 + 3z''_{yy}(1,1) - 2z''_{yy}(1,1) = 0,$$

så $z''_{yy}(1,1) = 6$.

Då blir Taylorutvecklingen

$$\begin{aligned}
& z(1,1). + z'_x(1,1).(x-1) + z'_y(1,1).(y-1) \\
& + \frac{1}{2}z''_{xx}(1,1).(x-1)^2 + z''_{xy}(1,1).(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}z''_{yy}(1,1)(y-1)^2 \\
= \; & 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 \\
= \; & 5 + 8x - 17y + 10xy - 8x^2 + 3y^2.
\end{aligned}$$

Svar: Taylorpolynomet är $5 + 8x - 17y + 10xy - 8x^2 + 3y^2$.

Exercise 4 *(711) Visa att*

$$\begin{cases} x + y + z^3 + 3w = 5 \\ x - y + 4z + w^3 = 5 \end{cases}$$

definierar en funktion $z(x, y)$ i en omgivning till $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$. Bestäm dess Taylorutveckling av ordning 2.

Här är jacobianen

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, w)} = \begin{pmatrix} 3z^2 & 3 \\ 4 & 3w^2 \end{pmatrix}$$

som i $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$ har värdet

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

och determinant skild från noll. Så sambanden definierar lokalt både en funktion $z(x, y)$ och $w(x, y)$.

Om vi deriverar implicit m.a.p. x får vi

$$\begin{cases} 1 + 3z^2 z'_x(x, y) + 3w'_x(x, y) = 0 \\ 1 + 4z'_x(x, y) + 3w^2 w'_x(x, y) = 0 \end{cases}$$

och insättning av $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$ ger

$$\begin{cases} 1 + 3z'_x(1, 1) + 3w'_x(1, 1) = 0 \\ 1 + 4z'_x(1, 1) + 3w'_x(1, 1) = 0 \end{cases} .$$

Lösning av det linjära ekvationssystemet ger $z'_x(1, 1) = 0$ och $w'_x(1, 1) = -1/3$.

Om vi deriverar implicit m.a.p. y fås

$$\begin{cases} 1 + 3z^2 z'_y + 3w'_y = 0 \\ -1 + 4z'_y + 3w^2 w'_y = 0 \end{cases}$$

och insättning av $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$ ger

$$\begin{cases} 1 + 3z'_y + 3w'_y = 0 \\ -1 + 4z'_y + 3w'_y = 0 \end{cases} .$$

Vi har igen ett linjärt ekvationssystem, med lösningen $z'_y(1, 1) = 2$ och $w'_y(1, 1) = -3/7$.

Vi får då Taylorpolynomet av grad 1 till $1 + 2(y - 1)$.

Svar: $1 + 2(y - 1)$.

Exempel 5 *(704b) Ange det största n så att $f(x, y, z) = O(r^n)$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ och*

$$f(x, y) = \cos x \cos y \cos z - \cos(x + y + z).$$

Med $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ får vi

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)(1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4)(1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4) \\ & -(1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2 + \frac{1}{24}(x+y+z)^4) \\ = \quad & -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}z^2 + ..., \end{aligned}$$

så $f(x, y) = O(x^2)$.

Svar: $n = 2$.