Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

**Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201,
Komplex analys för F,
03–10-23, klockan 14:00–17:00.**

Tal 1.

Låt $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$. C-R ekvationer ger oss att

$$u'_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = v'_y \quad \Longrightarrow \quad v(x,y) = -\int \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dy = \frac{x}{x^2+y^2} + c(x).$$

$$v'_x = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(x) = -u'_y = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c(x) = k = konstant.$$

Därför

$$f(z) = u + iv = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2} + ik = \frac{i(x-iy)}{x^2+y^2} + ik = \frac{i\bar{z}}{z\bar{z}} + ik.$$

Svar: $f(z) = i/z + ik, \quad k \in \mathbb{R}$.

Tal 2.

$$(z^2 - 2z + 1)e^{\frac{z+1}{z-1}} = (z-1)^2 e^{1+\frac{2}{z-1}}$$

$$= (z-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{-n+2}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{2} c_m (z-1)^m,$$

Där $c_2 = c_1 = e$, $c_m = \frac{e}{(2-m)!}$, $m = 0, -1, -2, \ldots$.

Tal 3. Låt

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2} = \frac{e^{iz}}{(z+1-i)(z+1+i)}.$$

Då

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz.$$

Vi integrerar funktionen f runt övre halvcirkeln $\Gamma_R = C_R + I_R$, där $C_R = \{z = x + iy \,:\, x^2 + y^2 = R,\, y > 0\}$, $I_R = \{z = x + iy \,:\, y = 0,\, -R \leq x \leq R\}$, $R > \sqrt{2}$. Funktionen f har en pol av ordning 1 i punkten $z = -1 + i$ som ligger innanför Γ_R.

Residysatsen ger

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big[f(z), -1 + i\Big] = 2\pi i \Big(\frac{e^{i(-1+i)}}{2i}\Big) = \pi e^{-1-i}.$$

Vi användar ML olikheten och får

$$\Big|\int_{C_R} f(z)\, dz\Big| \leq \max_{z \in C_R} |f(z)|\, \pi\, R \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2}\, \pi\, R \to 0, \quad R \to \infty.$$

Därför

$$\pi e^{-1-i} = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2}\, dz = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2}\, dx, \quad R \to \infty$$

och

$$\operatorname{Im} \pi e^{-1-i} = -\pi e^{-1} \sin 1 = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

Svar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2}\, dx = -\pi e^{-1} \sin 1.$$

Tal 4. Vi vet att

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Då

$$\frac{w}{w + i} \cdot \frac{1 + i}{1} = \frac{z + 2}{z} \cdot \frac{2i}{2i + 2}$$

$\Longrightarrow$

$$wz(1+i)^2 = i(w+i)(z+2)$$

$\Longrightarrow$

$$wz2i = iwz + 2iw - z - 2$$

$\Longrightarrow$

$$wi(z-2) = -z-2$$

$\Longrightarrow$

$$w = \frac{i(z+2)}{z-2}.$$

Om $z = -1 \in D \quad \Longrightarrow \quad w = -i/3 \in \tilde{D}$.