Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201 och 5B1216 i Komplex Analys 06–01–12, klockan 09:00–12:00.

Tal 1.

$$(\sin z)^2 = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2 - e^{2iz} - e^{-2iz}\right).$$

$$\frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1 - 1/2(e^{2iz} + e^{-2iz})}{2} = \frac{1}{4}\left(2 - e^{2iz} - e^{-2iz}\right).$$

Tal 2. Om $|z| = 1$, då $\bar{z} = z^{-1}$. Därför residy sats ger oss att

$$\int_{|z|=1} z\,|f(z)|^2\,dz = \int_{|z|=1} z(a_0 + a_1 z + a_2 z^2)(\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}^2)\,dz$$

$$= \int_{|z|=1} z(a_0 + a_1 z + a_2 z^2)(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z^{-1} + \bar{a}_2 z^{-2})\,dz =$$

$$\int_{|z|=1}\Big(a_0\bar{a}_2 z^{-1} + a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_2 + (|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2)z + (a_1\bar{a}_0 + a_2\bar{a}_1)z^2 + a_2\bar{a}_0 z^3\Big)\,dz$$

$$= 2i\pi\, a_0\,\bar{a}_2.$$

Svar:

$$\int_{|z|=1} z\,|f(z)|^2\,dz = 2i\pi a_0\bar{a}_2.$$

Tal 3. Låt $f(z) = h(z) + g(z)$, $h(z) = 3z^3$ och $g(z) = e^z$. Om $|z| = 1$, då

$$|h(z)| = |3z^3| = 3 > e \geq |e^z| = |g(z)|.$$

Rouches sats ger då att $f(z) = h(z) + g(z)$ har lika många nollställen som $h(z)$ innanför $\{z : |z| = 1\}$, dvs tre nollställen.

Tal 4.
Det är klart att $f(z_0) = 0$. Därför är det tillrckligt om man visar att cirkeln $\{z : |z| = 1\}$ avbildas till cirkeln $\{w : |w| = 1\}$.
Låt $z = e^{i\theta}$ och $z_0 = re^{i\varphi}$, där $r < 1$. Antag att $\xi = e^{i\theta} - re^{i\varphi}$. Då

$$|w| = |f(z)| = \left|\frac{e^{i\theta} - re^{i\varphi}}{1 - re^{-i\varphi}e^{i\theta}}\right| = |e^{-i\theta}| \left|\frac{e^{i\theta} - re^{i\varphi}}{e^{-i\theta} - re^{-i\varphi}}\right|$$

$$= \left|\frac{e^{i\theta} - re^{i\varphi}}{e^{-i\theta} - re^{-i\varphi}}\right| = \left|\frac{\xi}{\bar{\xi}}\right| = 1.$$