LÖSNINGAR TILL KS1 I KOMPLEX ANALYS
23 SEPTEMBER 2005

Uppgift 1.

a)

$$u(x,y) = \frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$u'_x = \frac{x^2+y^2-x\,2\,x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$u''_{xx} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)\,2\,(x^2+y^2)\,2\,x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$u'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$u''_{yy} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2+2\,xy\,2\,(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x^3-2xy^2+8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

Därför

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

och u är harmonisk om $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Vi användar C-R ekvationer

$$u'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v'_x.$$

Därför

$$v(x,y) = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y).$$

$$v'_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) = u'_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Det betyder att $C'(y)=0$ och $C(x)=k=$ konst, $k\in\mathbb{R}$.

Svar:

$$f(z) = u+iv = 1+\frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2} + ik = 1+ik+\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1+ik+\frac{1}{z}.$$

Uppgift 2.

Låt $P(x,y) = 3x^2y^3 - x^2y$ och $Q(x,y) = xy^2 + 3x^3y^2$.
Greens sats ger oss

$$I := \oint_C (3x^2y^3 - x^2y)\,dx + (xy^2 + 3x^3y^2)\,dy$$

$$= \oint_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_{x^2+y^2\le 9} (Q'_x - P'_y)\,dxdy$$

$$= \int\int_{x^2+y^2\le 9} (y^2 + 9x^2y^2 - 3x^2 3y^2 + x^2)\,dxdy = \int\int_{x^2+y^2\le 9} (x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 r\,drd\theta = \frac{1}{4}3^4\,2\pi = \frac{81\pi}{2}.$$

Svar: $I = \frac{81\pi}{2}$.

Uppgift 3.

$$\frac{1}{z^2+3z} = \frac{1}{z(z+3)} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+3}\Big).$$

Därför

$$I := \oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+3z}\,dz = \frac{1}{3}\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z}\,dz - \frac{1}{3}\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z+3}\,dz.$$

Funktionen $\frac{1}{z+3}$ är analytisk om $|z-i| \le 2$ och Cauchy-Goursat sats ger oss att

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z+3}\,dz = 0.$$

Vi användar deformationsprincipen för att få

$$\frac{1}{3}\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{3}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = \frac{2i\pi}{3}.$$

Svar: $I = \frac{2i\pi}{3}$.