LÖSNINGAR TILL KS2 I KOMPLEX ANALYS
11 OKTOBER 2005

Uppgift 1. Funktionen $\cos z$ är analytisk. Därför uppnås max $|\cos z|$ på randen av Ω.
Vi hittar största värden av $|\cos z|$ på varje del av randen.
1. Låt $z = x + iy$, $y = 0$ och $0 \leq x \leq \pi/2$. Då

$$\max_{0\leq x\leq \pi/2} |\cos x| = |\cos 0| = 1.$$

2. För $x = \pi/2$ och $0 \leq y \leq 2$

$$\max_{0\leq y\leq 2} |\cos(\pi/2 + iy)| = \frac{1}{2} \max_{0\leq y\leq 2} |e^{i\pi/2-y} + e^{-i\pi/2+y}|$$

$$= \frac{1}{2} \max_{0\leq y\leq 2} |ie^{-y} - ie^{y}| = \frac{1}{2} \max_{0\leq y\leq 2} (e^{y} - e^{-y}) = \frac{1}{2} (e^{2} - e^{-2}).$$

3. För $0 \leq x \leq \pi/2$ och $y = 2$

$$\max_{0\leq x\leq \pi/2} |\cos(x + i2)| = \frac{1}{2} \max_{0\leq x\leq \pi/2} |e^{ix-2} + e^{-ix+2}|$$

$$= \frac{1}{2} (e^{0-2} + e^{0+2}) = \frac{1}{2} (e^{-2} + e^{2}).$$

4. För $x = 0$ och $0 \leq y \leq 2$

$$\max_{0\leq y\leq 2} |\cos(iy)| = \frac{1}{2} \max_{0\leq y\leq 2} |e^{-y} + e^{y}| = \frac{1}{2} (e^{-2} + e^{2}).$$

Svar:

$$\max_{z\in\Omega} |\cos z| = \frac{1}{2} (e^{-2} + e^{2}).$$

Uppgift 2.

$$\frac{z^2}{z^2-3z+2} = \frac{z^2}{(z-2)(z-1)} = \frac{z^2}{z-2} - \frac{z^2}{z-1}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{z^2}{1-z/2} - \frac{z}{1-1/z} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^{2+n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{1-n}.$$

Svar: Om $1 < z < 2$, då

$$\frac{z^2}{z^2-3z+2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

där $a_n = -1$, $n = 1, 0, -1, -2, \ldots$ och $a_n = -2^{1-n}$, $n = 2, 3, \ldots$.

Uppgift 3. Låt

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}.$$

Vi integrerar funktionen runt $C_R = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, där:
$\Gamma_1 = \{z = x + iy \,:\, y = 0,\, -R \le x \le R\}$, $R > 3$,
$\Gamma_2 = \{z = Re^{i\theta} \,:\, 0 \le \theta \le \pi\}$,

Funktionen f har två poler av ordning 1 i punkter $z_1 = i$ och $z_2 = 3i$ som ligger innanför C_R. Residysatsen ger

$$\oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\text{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}, i\right] + \text{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}, 3i\right]\right)$$
$$= 2\pi i \Big(\frac{-1}{2i(-1+9)} + \frac{-9}{(-9+1)6i}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

1.
$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx \to I, \quad R \to \infty.$$

2. Vi använder ML olikheten och får

$$\Big|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\Big| \le \max_{z\in\Gamma_2} |f(z)|\,\pi R \le \frac{R^2}{(R^2-1)(R^3-9)}\,\pi R \to 0, \quad R \to \infty.$$

Svar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$