Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201 och 5B1216 i Komplex Analys 05–10–24, klockan 09:00–12:00.

Tal 1.

$$\begin{aligned}
(u^2)'_x &= 2uu'_x, & (u^2)''_{xx} &= 2(u'_x)^2 + 2uu''_{xx},\\
(u^2)'_y &= 2uu'_y, & (u^2)''_{yy} &= 2(u'_y)^2 + 2uu''_{yy},\\
(v^2)'_x &= 2vv'_x, & (v^2)''_{xx} &= 2(v'_x)^2 + 2vv''_{xx},\\
(v^2)'_y &= 2vv'_y, & (v^2)''_{yy} &= 2(v'_y)^2 + 2vv''_{yy}.
\end{aligned}$$

P.g.a $\Delta u = \Delta v = 0$

$$\Delta(u^2 - v^2) = (u^2 - v^2)''_{xx} + (u^2 - v^2)''_{yy}$$

$$= 2(u'_x)^2 + 2(u'_y)^2 + 2u(u''_{xx} + u''_{yy}) - 2(v'_x)^2 - 2(v'_y)^2 - 2v(v''_{xx} + v''_{yy})$$

$$= 2\Big((u'_x)^2 + (u'_y)^2 - (v'_x)^2 - (v'_y)^2\Big).$$

C-R ekvationer $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ ger oss

$$(u^2 - v^2)''_{xx} + (u^2 - v^2)''_{yy} = 0.$$

Tal 2.

$$\frac{1}{z-1}\, e^{\frac{z}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\, e^{1+\frac{1}{z-1}}$$

$$= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}.$$

Svar:

$$\frac{1}{z-1}\, e^{\frac{z}{z-1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n,$$

där $a_{-n} = \frac{e}{(-1-n)!}$, $n = -1, -2, \ldots$; $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$..

Tal 3. Låt substituera $z = ix$. Då

$$I := \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{z^2 - 1}\, dz = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1}\, dx.$$

Antag att

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$$

och integrerar funktionen f runt övre halvcirkeln: $\Gamma_R = C_R + I_R$, där
$C_R = \{z = x + iy \,:\, x^2 + y^2 = R,\, y > 0\}$,
$I_R = \{z = x + iy \,:\, y = 0,\, -R \le x \le R\}$, $R > 1$.
Funktionen f har en pol av ordning 1 i punkten $z = i$ som ligger innanför Γ_R.
Residysatsen ger

$$-i \oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = -i\, 2i\pi\, \mathrm{Res}\Big[f(z), i\Big] = -i\, \pi\, e^{-1}.$$

Vi användar ML olikheten och får

$$\Big| \int_{C_R} f(z)\, dz \Big| \le \max_{z \in C_R} |f(z)|\, \pi\, R \le \frac{1}{R^2 - 1}\, \pi\, R \to 0, \quad R \to \infty.$$

Därför

$$-i\, \pi\, e^{-1} = -i \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = -i \int_{C_R} f(z)\, dz - i \int_{I_R} f(z)\, dz$$

$$\to -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1}\, dx = I, \quad R \to \infty.$$

Svar:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^z}{z^2 - 1}\, dz = -i\, \pi\, e^{-1}.$$

Tal 4. Vi vet att

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Då

$$\frac{w-1}{w+i}\cdot\frac{i+i}{i-1}=\frac{z-2}{z-0}\cdot\frac{1+i-0}{1+i-2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{w-1}{w+i}\cdot\frac{2i}{i-1}=\frac{z-2}{z}\cdot\frac{1+i}{i-1}$$

$\Longrightarrow$

$$(w-1)2iz=(z-2)(1+i)(w+i)$$

$\Longrightarrow$

$$wz2i-2iz=wz(1+i)+iz(1+i)-2w(1+i)-2(1+i)i$$

$\Longrightarrow$

$$w(2iz-z-zi+2(1+i))=2iz+iz-z-2i+2$$

$\Longrightarrow$

$$w=\frac{z(3i-1)+2(1-i)}{z(i-1)+2(1+i)}=\frac{(2-i)z-2}{z-2i}=\frac{(1+2i)z-2i}{iz+2}.$$