KTH Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till Tentamen i 5B1201 Komplex analys den 6 mars 2007

1. **Låt $u(x, y) = \sin xy$. Avgör om det finns en funktion $v(x, y)$ sådan att $u(x, y) + iv(x, y)$ är analytisk i någon omgivning av origo. Bestäm i så fall en sådan funktion v.**

Lösning: Vi deriverar partiellt och får att $\Delta u = -(x^2 + y^2)\sin xy$, vilket i och för sig är noll i origo och längs axlarna, men varje omgivning av origo innehåller punkter där detta inte är noll. Alltså är u inte harmonisk i någon omgivning av origo och följaktligen kan det inte heller finnas någon funktion v med de eftersökta egenskaperna.

Svar: Sådan v finns icke.

2. **Beräkna integralen** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

Lösning: Enligt sats 4 i kapitel 6.5 i Wunsch är integralen lika med $2\pi i$ gånger summan av integrandens residyer i övre halvplanet. Det finns bara en singulär punkt i övre halvplanet, nämligen i där integranden har en pol av ordning 2. Residyn blir

$$\lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{z^2 + 2}{(z + i)^2} = -\frac{3i}{4}$$

och följaktligen blir integralen $3\pi/2$.

Svar: $3\pi/2$.

3. **Hur många lösningar (räknade med multiplicitet) har ekvationen $11z^4 - 2e^{2z} + 6z = 2$ då $|z| < 2$?**

Lösning: Vi ser direkt att $11z^4$ har 4 nollställen i området. Vidare ser vi att för $|z| = 2$ gäller att $|-2e^{2z} + 6z - 2| \leq |2e^{2z}| + |6z| + 2 < 2 \cdot 3^4 + 12 + 2 = 176 = |11z^4|$. Enligt Rouches sats har då $11z^4$ och $11z^4 - 2e^{2z} + 6z - 2$ lika många nollställen innanför $|z| = 2$. Den givna ekvationen har alltså fyra nollställen i det aktuella området.

Svar: 4.

4. **Beräkna, för samtliga heltal n och samtliga positiva reella tal $r \neq 1$, integralen $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{z^n}{(z-1)^n}\, dz$. (Kurvan genomlöps ett varv i positiv led).**

Lösning: För $n = 0$ är integranden lika med 1 som är en analytisk funktion i hela planet. Enligt Cauchy-Goursats sats är integralen i detta fall 0 oavsett radien r.

För $n > 0$ gäller enligt Cauchy-Goursats sats att integralen blir 0 för $0 < r < 1$. För $r > 1$ blir integralen enligt Cauchys utvidgade integralformel, med $f(z) = z^n$, lika med $(2\pi i)f^{(n-1)}(1)/(n-1)! = 2\pi i n$.

För $n < 0$ kan vi använda Cauchys utvidgade formel igen, men den här gången är resultatet oberoende av r (eftersom den singulära punkten nu är origo som ligger innanför kurvan oavsett r). Integralen beräknas, med $g(z) = (z-1)^m$, där $m = -n$ är positivt till $2\pi i g^{(m-1)}(0)/(m-1)! = -2\pi i m = 2\pi i n$.