KTH Matematik
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Lappskrivning 2 i 5B1201 Komplex analys den 16 februari 2007

1. **Utveckla funktionen $f(z) = \dfrac{2}{z(z-2)}$ i en Laurentserie som är konvergent för z i någon punkterad omgivning av origo, $0 < |z| < r$. Hur stort kan r maximalt vara?**

Lösning: Eftersom $\dfrac{2}{z-2} = -\dfrac{1}{1-z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{1}{2^n} z^n$ då $|z| < 2$ gäller efter multiplikation av detta med $1/z$ att

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n,$$

för $0 < |z| < 2$.

2. **Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma f(z)\,dz$ om $f(z) = \dfrac{1}{z^2(2z-3)}$ och γ är cirkeln med medelpunkt i 1 och radie 2, genomlöpt ett varv i positiv led.**

Lösning: Enligt residysatsen blir integralen lika med $2\pi i$ gånger summan av residyerna innanför kurvan. Integranden är singulär i $z = 0$ och $z = 3/2$. Eftersom $\lim_{z\to 0} z^2 f(z)$ existerar ändligt har vi att göra med en pol av ordning 2 i origo. Eftersom $\lim_{z\to 3/2}(z-3/2)f(z)$ existerar ändligt har vi att göra med en pol av ordning 1 i $z = 3/2$. Vi får:

$$\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\frac{1}{2z-3} = \lim_{z\to 0} \frac{-2}{(2z-3)^2} = -\frac{2}{9}$$

Vidare gäller att

$$\operatorname{Res}(f;3/2) = \lim_{z\to 3/2} \frac{1}{2z^2} = \frac{2}{9}$$

Summan av residyerna är noll och därmed är integralen 0.

Svar: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

3. **Klassificera samtliga singulariteter hos funktionen $f(z) = \dfrac{z^2 + \frac{1}{z^2}}{z - i}$. Beräkna residyn av f i varje punkt $z \in \mathbf{C}$.**

Lösning: Vi ser att $f(z) = \dfrac{z^4 + 1}{z^2(z-i)}$. Vi ser att f har isolerade singulariteter i punkterna $z = 0$ och $z = i$ och inga andra singulariteter. Eftersom $\lim_{z \to i}(z - i)f(z)$ existerar ändligt har vi att göra med en pol av ordning 1 i $z = i$. Eftersom $\lim_{z \to 0} z^2 f(z)$ existerar ändligt har vi att göra med en pol av ordning 2 i $z = 0$. Vi får:

$$\mathrm{Res}(f; 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 + 1}{z - i} = \lim_{z \to 0} \frac{4z^3(z-i) - z^4 - 1}{(z-i)^2} = 1$$

Vidare:

$$\mathrm{Res}(f; i) = \lim_{z \to i} \frac{z^4 + 1}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{2}{-1} = -2.$$

Residyn i de två singulära punkterna är alltså 1 (i origo) och -2 (i i). I alla övriga punkter i det komplexa planet är residyn 0 eftersom funktionen är analytisk där.