Lösningsförslag till Tentamen i 5B1202/1 Differentialekvationer och transformer II, del 1
Måndagen den 15 december 2003 kl. 14.00–19.00

---

1. (a) Den linjära ekvationen $y' = y$ har lösning $y(t) = y_0 e^t$, som existerar för alla t. Den ickelinjära ekvationen $y' = y^2$ är separabel och löses enkelt genom en integration ($y \neq 0$):

$$\frac{dy}{y^2} = dt \quad \text{vilket ger} \quad -\frac{1}{y} = t + C.$$

Därför har vi att $y(t) = \frac{y_0}{1-y_0 t}$ (om $y(0) = 0$ så är $y(t) = 0$). Notera att om $y(0) = y_0 > 0$ existerar denna lösning endast för $t < 1/y_0$.

(b) Den första ekvationen är linjär och eftersom koefficienterna är kontinuerliga överallt existerar lösningen överallt (Theorem 2.4.1). Den andra ekvationen är ickelinjär och uppfyller villkoren för Theorem 2.4.2, men i detta fall är inte lösningen garanterad att existera för alla t vilket också är fallet för lösningen av den andra ekvationen svarande till $y(0) = 1$.

2. Laplacetransformering ger $Y_u(s) = H(s)Y_i(s)$, vilket för testsignalen blir

$$\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = H(s)\frac{s}{s^2+1}.$$

Detta ger att $H(s) = 1/s^2$ (så $h(t) = t$). Nu om $y_i(t) = e^{-t}$, dvs $Y_i(s) = 1/(s+1)$, så blir

$$Y_u = H(s)Y_i(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{-1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

och invers-Laplacetransformering ger svaret $y_u(t) = t - 1 + e^{-t}$.

3. A har karakteristiska ekvationen

$$0 = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3).$$

Till egenvärdet $\lambda_1 = 2$ hör en egenvektor $\boldsymbol{\xi_1} = (1,1)^T$ och till $\lambda_2 = -3$ hör en egenvektor $\boldsymbol{\xi_2} = (1,-4)^T$.

(a) Fasporträttet är en sadelpunkt, se sid 376, figure 7.5.2(a) i Boyce-diPrima, seventh edition.

(b) A kan alltså diagonaliseras:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = TDT^{-1}.$$

Detta ger då att

$$e^{At} = e^{TDT^{-1}} = Te^{Dt}T^{-1} = \ldots = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

(c) Den allmänna lösningen kan antingen skrivas

$$\mathbf{x} = e^{At}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mathbf{x_p}$$

eller

$$\mathbf{x} = c_1\xi_{\mathbf{1}}e^{2t} + c_2\xi_{\mathbf{2}}e^{-3t} + \mathbf{x_p}.$$

För att finna en partikulärlösning $\mathbf{x_p}$ gör vi ansatsen $\mathbf{x} = (A_1t + B_1, A_2t + B_2)^T$. Insatt i ekvationen ger

$$\begin{cases} A_1 = B_1 + b_2 \\ 0 = A_1 + A_2 - 9 \\ A_2 = 4B_1 - 2B_2 0 = 4A_1 - 2A_2, \end{cases}$$

vilket har lösningen $A_1 = 3$, $A_2 = 6$, $B_1 = 2$, och $B_2 = 1$.

4. (Chebyshevs ekvation.)

(a) $x = 0$ är ordinär punkt, analytisk lösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Punkten $x = 1$ är reguljärt singulär och ansatsen $|x-1|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$, $r \in \mathbf{C}$ är lämplig.

(b) Den första ansatsen görs, vilket ger

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n(n-1)a_nx^{n-2} - n(n-1)a_nx^n - na_nx^n + 4a_nx^n) = 0$$

Ur detta bestäms på standard sätt att $a_2 = -2a_0$, $a_3 = -a_1/2$, och $a_4 = 0$. (Då α är heltal blir antingen y_1 eller y_2 ett polynom (med beteckningar som i bokens Theorem 5.3.1). I vårt fall är $a_0(1 - 2x^2)$ en lösning.)

5. (a) Inför $y = x'$ vilket ger systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 + 3x \end{cases}$$

som har kritiska punkter $(0 = y, 0 = x(x+3))$ i $(0,0)$ och $(-3,0)$. Jacobianmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x+3 & 0 \end{pmatrix}$$

I punkten $(0,0)$ har matrisen egenvärden $\lambda = \pm\sqrt{3}$, så punkten är en (instabil) sadelpunkt för det lineariserade sytemet såväl som för urpsungssystemet. I punkten $(-3,0)$ har matrisen egenvärden $\lambda = \pm i\sqrt{3}$. Det linjäriserade systemet har således ett (stabilt) centrum, men ingen definitiv slutsats kan dras för ursprungssystemet i denna punkt. Se Table 9.3.1.

(b) Enligt Theorem 9.7.1 måste en periodisk lösning omsluta minst en kritisk punkt. Eftersom systemet saknar kritiska punkter i halvplanet $x > 0$ så finns ingen periodisk lösning. (Vi kan faktiskt få ut mer ur Theorem 9.7.1, nämligen att det inte finns någon periodisk lösning helt i halvplanet $x > -3$ eftersom $(0,0)$ är en sadelpunkt.) Alternativt kan man se svaret direkt ur ekvationen: $x'' = x^2 + 3x > 0$ för $x > 0$ medför att $x'(t)$ är växande vilket omöjliggör $(x'(t+T) = x'(t))$ en periodisk lösning.

6. Skriv ekvationen som $Mdx + Ndy = 0$ och multiplicera med den okända funktionen $\mu = \mu(t)$, $t = xy$. Det måste gälla att $(\mu M)_y$=$(\mu N)_x$ (de partiella derivatorna map y respektive x). Detta ger att

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

eller omskrivet att

$$\mu_y M - \mu_x N = \mu(N_x - M_y).$$

Eftersom $\mu_x = \mu'\, y$ och $\mu_y = \mu'\, x$ blir den senare ekvationen

$$\mu'(x(x^2y^2 + xy)y - y(x^2y^2 - 1)x) = \mu(3x^2y^2 - 1 - 3x^2y^2 - 2xy)$$

eller förenklat

$$\mu'(x^2y^2 + xy) = \mu(-1 - 2xy).$$

eller med t:

$$\mu'(t)(t^2 + 1) + \mu(t)(2t + 1) = 0,$$

vilket är en linjär första ordningens ekvation. Notera att vänsterledet är

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)(t^2 + t)).$$

Detta implicerar att $\mu = C/(t^2 + t)$ (vi väljer $C = 1$) förutsatt att $t^2 + t \neq 0$ eller ekvivalent att $xy \neq 0$ och $xy \neq -1$.

Tillbaka till ursprungsekvationen. Vi vill bestämma Φ så att

$$d\Phi = \mu M dx + \mu N dy = 0$$

. Har att $\Phi_x = \mu M = y$, integration ger $\Phi = xy + h(y)$. Deriveras detta partiellt map y får vi $\Phi_y = x + h'(y)$ som ska vara lika med μN. Detta ger att $h'(y) = -1/y$. Till slut har vi då att

$$\Phi(x, y) = xy - \ln|y| = C,$$

som ger en skara implicita lösningar. I undantagsfallen $xy = 0$ och $xy = -1$ ser man lätt att $y(x) = 0$ är en lösning och att $y(x) = -1/x$, $x \neq 0$, är en annan lösning.