KTH Matematik

Tentamen i 5B1202/1 Differentialekvationer och transformer II, del 1
Tisdagen den 20 augusti 2004 kl. 14.00–19.00

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal, radergummi, och "BETA, Mathematics Handbook".

Instruktioner: Tentamen består av 6 uppgifter. Varje fullständigt och korrekt löst uppgift ger 3 poäng. (För poäng krävs väl motiverade lösningar.) Eventuella bonuspoäng adderas. För godkänt krävs totalt minst 9 poäng. Preliminära betygsgränser: för betyg 3 krävs 9p, för betyg 4 krävs 13p och för betyg 5 krävs 16p.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

---

1. Lös differentialekvationen

$$(e^{2y}-1)\cos(x)y'(x) = e^y \sin(2x)$$

med $y(0)=0$. (3p)

2. Skissera fasporträtten till

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = -3x+4y \\ y' = -2x+3y \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = 4x-2y \\ y' = 5x+2y. \end{cases}$$

(3p)

3. Bestäm funktionen $y(t)$ definierad för positiva t som löser integro-differentialekvationen

$$y'(t) - \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 1$$

och uppfyller begynnelsevillkoret $y(0)=0$. (3p)

4. Man betraktar en viss ekvation på formen

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0,$$

där p och q är kontinuerliga funktioner för $-\infty < t < \infty$. Förklara varför inte $y(t) = t\sin(t^2)$ kan vara en lösning till ekvationen. (Förslag: studera Wronskianen.) (3p)

5. För vilka värden av parametrarna a och b har systemet

$$\begin{cases} x' = -7ay - 2xy - x + b \\ y' = -a^2y + y + 2xy - 3x + 1 \end{cases}$$

punkten $(x, y) = (1, 1)$ som en kritisk punkt? Bestäm för alla sådana värden av a och b karaktären av den kritiska punkten $(1, 1)$. (3p)

6. Finns det någon icke-trivial lösning till differentialekvationen

$$2xy'' + (5 + x)y' - y = 0$$

som är definierad för positiva x och uppfyller begynnelsevillkoret

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0?$$

(3p)

Lycka till!