Lösningsförslag till Tentamen i 5B1202/1 Differentialekvationer och transformer II, del 1
Tisdagen den 20 augusti 2004 kl. 14.00–19.00

---

1. Separation av variablerna ger

$$\frac{e^{2y}-1}{e^y}dy = \frac{\sin 2x}{\cos x}dx,$$

som efter förenkling (dubbla vinkeln formel) blir

$$(e^y - e^{-y})dy = 2\sin x dx.$$

Integreras detta får man

$$e^y + e^{-y} = -2\cos x + C$$

vilket kan skrivas som

$$\cosh y = -\cos x + C/2.$$

Då fås $y(x) = (-\cos x + C/2)$. $y(0) = 0$ ger ekvationen för C:

$$\cosh 0 = -\cos 0 + C/2$$

vilket är $1 = -1 + C/2$, så $C = 4$.

2. Man beräknar egenvärden och egenvektorer till systemmatriserna.

(a) Här ser man direkt att egenvärdena är 2 och 3, med motsvarande egenvektorer $(1,0)$ och $(0,1)$. Punkten är en instabil nod.

(b) Ekvation: $\lambda^2 - 1 = 0$, vilket ger egenvärdena $\lambda = \pm 1$. Egenvektor för $\lambda = 1$ t ex (1,1) och för $\lambda = -1$ t ex (2,1). Punkten är alltså en sadelpunkt, som alltid är instabila.

(c) Ekvation: $\lambda^2 - 6\lambda \pm \sqrt{9-18}$ vilket ger lösningarna $\lambda = 3 \pm 3i$. Den kritiska punkten (0,0) är således en instabil spiral. I punkten (1,0) är $x' = 4$ och $y' = 5$ (genom insättning i ekvationen), från vilket man ser att rörelsen går motsols.

Se boken kap. 9.1 för figurer.

3. Integralen som ingår i ekvationen är faltningen av $y(t)$ och $\cos t$. Det är naurligt att då tillämpa Laplacetransformen. Om $Y(s)$ är Laplacetransformen av $y(t)$, blir ekvationen

$$sY(s) - y(0) - Y(s)\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s}.$$

Insättning av begynnelsevillkor ger oss

$$Y(s)\left(s - \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s}$$

vilket ger

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}.$$

Inverse Laplacetransform ger då

$$y(t) = t + \frac{t^3}{6}.$$

4. Alla lösningar är en linjär kombination av två linjärt oberoende lösningar. Låt y_2 vara en lösning linjärt oberoende av $t\sin t^2$. Vi studerar Wronskianen som blir

$$W(t\sin t^2, y_2) = \det\begin{pmatrix} t\sin t^2 & y_2 \\ \sin t^2 + 2t^2\sin t^2 & y_2' \end{pmatrix} = t\sin t^2 y_2' - y_2(\sin t^2 + 2t^2\cos t^2).$$

Notera att detta uttryck är 0 för $t = 0$ *oavsett* y_2, men å andra sidan är en Wronskian alltid icke-noll (konstant dessutom, faktiskt) för två linjärt oberoende lösningar till ekvationer av denna typ. Därför är det omöjligt att $t\sin t^2$ är en lösning.

5. För att $(1,1)$ ska var en kritisk punkt, måsye båda högerleden vara 0. Insättning av $x = y = 1$ ger oss villkoret

$$\begin{cases} -7a + b - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Vi får $a = 1$, $b = 10$ eller $a = -1, b = -4$.

Jakobimatrisen till systemet är

$$\begin{pmatrix} -2y - 1 & -7a - 2x \\ 2y - 3 & -a^2 + 1 + 2x \end{pmatrix}.$$

För paret $a = 1$, $b = 10$ har det lineariserade systemet i punkten $(1,1)$ matrisen

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Den har egenvärdena

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{61})$$

som motsvarar till sadel för det lineariserade systemet. Det ursprungliga icke-linjära systemet har också fasporträtt av typ sadel.

För paret $a = -1$, $b = -4$, har det lineariserade systemet matrisen

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Den har egenvärdena

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

som också motsvarar en sadel för både lineariserade och ursprungliga icke-linära systemet.

6. Ekvationen kan skrivas om till

$$y'' + \left(\frac{5}{2x} + \frac{1}{2}\right) y' - \frac{1}{2x} y = 0.$$

Den har $x_0 = 0$ som en reguljär singulär punkt. Den indiciala ekvationen blir

$$r(r-1) + \frac{5}{2} r = 0$$

som har rötter $r_1 = 0$ och $r_2 = -3/2$. Rötterna skiljer inte sig med ett heltal och då har ekvationen två linjärt oberoende lösningar i form av potensserier:

$$y_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

och

$$y_2(x) = x^{-3/2}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots),$$

där $a_0 \neq 0$ och $b_0 \neq 0$. Alla lösningar till ekvationen har formen

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Om vi antar att $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$ för någon lösning, då vi får först $C_2 = 0$ (eftersom annars blir lösningen y(x) obegränsad nära $x_0 = 0$) och sedan $C_1 = 0$ (eftersom $\lim_{x\to 0} y_1(x) = a_0$). Alltså, den enda lösningen som uppfyller $\lim_{x\to 0} y(x) = 0$ är den triviala lösningen $y(x) = 0$.