Kungl Tekniska Högskolan
Matematiska institutionen

Tentamen
Diff o Trans för F2, 5B1202/1
99-04-12

Skrivtid: 5 timmar.
Hjälpmedel: Beta
3 poäng för per uppgift. Betygsgränser: $3 \geq 9$, $4 \geq 13.5$, $5 \geq 16.5$.

Förenkla svaren så långt som möjligt.
Endast väl motiverade lösningar ger poäng.

1. Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' - \sin(t)e^y = 0, \qquad y(0) = 0\,.$$

Bestäm existensintervallet för lösningen.

2. Lös systemet

$$\begin{cases} y_1' = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = c_1, \\ y_2' = -y_1(t) - y_2(t), & y_2(0) = c_2, \end{cases}$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga reella tal.
Rita ett fasporträtt för systemet, och markera riktningen hos rörelsen.

3. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} x''(t) + 8x(t) - 4y(t) &= \theta(t-1) - \theta(t-2)\,, \\ -4x(t) + y''(t) + 8y(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$. Här är $\theta(t)$ Heaviside's stegfunktion, d v s

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Bestäm $x(t)$ för $t > 0$.

4. Betrakta systemet

$$\frac{dx}{dt} = y(1 - x^2 - y^2),$$
$$\frac{dy}{dt} = -x(1 - x^2 - y^2).$$

a) Detta systemet har dels en isolerad kritisk punkt, dels en sluten kurva bestående enbart av kritiska punkter. Bestäm den isolerade punkten och den slutna kurvan.

b) Linjarisera systemet i närheten av den isolerade kritiska punkten. Visa att detta linjariserade systems lösningar är cirklar runt punkten.

c) Visa att även det ursprungliga, ickelinjära systemets lösningar ligger på cirklar runt samma punkt.

Ledtråd för c): Beräkna $\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2)$ och dra en slutsats.

5. Betrakta nivåkurvorna till funktionen

$$\phi(x, y) = e^{(xy)} + y,$$

d v s kurvor på formen $y = y(x, C)$ vilka uppfyller

$$\phi(x, y(x)) = C.$$

Härled en differentialekvation för dessa nivåkurvor. Skriv upp denna. Betrakta nu lösningen med $y(0) = 1$. Visa att för denna lösning gäller $y(1) < 0.5$.

6. Betrakta de två begynnelsevärdesproblemen

1) $y'(t) = y(t)^2 + t^2, \qquad y(0) = b,$

och

2) $y'(t) = y(t)^2, \qquad y(0) = b.$

Bägge med samma $b > 0$. Visa med hjälp av problem 2) och dess lösning att det finns ett $0 < T < \infty$ sådant att lösningen till 1) går mot oändligheten då $t \to T$. Ordentliga argument krävs.

LYCKA TILL!

Kungl Tekniska Högskolan
Matematiska institutionen

Lösningar till tentamen
Diff o Trans för F2, 5B1202
99-04-12

1. Ekvationen är separabel,

$$y'e^{-y} = \sin t, \qquad -e^{-y} = -\cos t + C\,.$$

$y(0) = 0$ ger $C = 0$. Alltså

$$y(t) = -\ln(\cos t).$$

Existensintervallet är det största intervallet runt $t = 0$ där $\cos t > 0$, d.v.s. $\{t : |t| < \pi/2\}$. Det gäller att $y(t) \to +\infty$ när t närmar sig intervallets ändpunkter $\pi/2$ eller $-\pi/2$.

2. Egenvärden $-1 \pm i$ med egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. Låt $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, då $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ och fundamentalmatrisen, $\Phi(t)$, uppfyller

$$\Phi(t) = T\begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{pmatrix} T^{-1} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Lösningen är

$$\bar{y}(t) = \Phi(t)\bar{c} = e^{-t}\begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är komplext konjugerade med negativ realdel och därmed är origo en asymptotiskt stabil spiralpunkt. Rotationsriktningen är negativ (medsols) vilket framgår om man t.ex. sätter $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ i ovanstående lösning eller om man t.ex. sätter $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ i den ursprungliga ekvationen.

3. Efter Laplacetransformering fås ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (s^2+8)X(s) - 4Y(s) &= (e^{-s} - e^{-2s})/s\,, \\ -4X(s) + (s^2+8)Y(s) &= 0\,. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\frac{(s^2+8)^2-16}{s^2+8}X(s) = \frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}.$$

Eftersom $(z+8)^2-16$ har rötterna $z=-4$ och $z=-12$ är $(s^2+8)^2-16=(s^2+4)(s^2+12)$ och partialbråksutveckling leder till

$$X(s) = \frac{s^2+8}{s(s^2+4)(s^2+12)}(e^{-s}-e^{-2s}) = \left(\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{s} - \tfrac{1}{8}\tfrac{s}{s^2+4} - \tfrac{1}{24}\tfrac{s}{s^2+12}\right)(e^{-s}-e^{-2s}).$$

Alltså är svaret

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{6}\big(\theta(t-1)-\theta(t-2)\big) - \tfrac{1}{8}\big(\theta(t-1)\cos[2(t-1)] - \theta(t-2)\cos[2(t-2)]\big) \\ &\quad - \tfrac{1}{24}\big(\theta(t-1)\cos[2\sqrt{3}(t-1)] - \theta(t-2)\cos[2\sqrt{3}(t-2)]\big) \\ &= \begin{cases} 0, & t<1; \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\cos[2(t-1)] - \frac{1}{24}\cos[2\sqrt{3}(t-1)], & 1 \le t < 2; \\ \frac{1}{8}\left(\cos[2(t-2)] - \cos[2(t-1)]\right) & \\ +\frac{1}{24}\left(\cos[2\sqrt{3}(t-2)] - \cos[2\sqrt{3}(t-1)]\right), & t \ge 2. \end{cases} \end{aligned}$$

4.

a) $y(1-x^2-y^2)=0$ och $-x(1-x^2-y^2)=0$, om och endast om $(x,y)=(0,0)$ eller $x^2+y^2=1$.

b) Det linjära systemet är

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena $\pm i$ med egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen är $\bar{x}(t) = c_1\bar{u}(t) + c_2\bar{v}(t)$ där $e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \bar{u}(t) + i\bar{v}(t)$ d.v.s. $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, $\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$. $|\bar{x}(t)|^2 = c_1^2 + c_2^2$ eftersom $\bar{u}(t)$ och $\bar{v}(t)$ är vinkelräta och har längden 1.

c)

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2xx' + 2yy' = 2xy(1-x^2-y^2) - 2yx(1-x^2-y^2) = 0$$

varför

$$x^2(t) + y^2(t) = \text{Konst.}$$

5.
Vi vet att

$$\phi(x,y) = e^{(xy)} + y = C\,,$$

där C är en konstant. Genom implicit derivering m a p x fås

$$y e^{(xy)} + y'\left(x e^{(xy)} + 1\right) = 0\,.$$

D v s

$$y' = -y\frac{e^{(xy)}}{x e^{(xy)} + 1}\,,$$

vilket är den efterfrågade differentialekvationen.
Låt nu $y(x)$ vara den lösning som uppfyller $y(0) = 1$. Konstanten blir i detta fall $C = 2$, och lösningen ges implicit av

$$e^{(xy)} + y = 2\,.$$

För $x = 1$ får vi

$$e^{(y(1))} + y(1) = 2\,. \tag{1}$$

Denna ekvation kan inte lösas i termer av elementära funktioner, utan vi måste använda någon approximationsmetod. Taylorutveckling ger

$$e^{(y(1))} = 1 + y(1) + R\,, \tag{2}$$

där R är resttermen i Taylorutvecklingen. Vi får genom insättning av (2) i (1)

$$y(1) = 0.5 - R\,,$$

och det eftersökta påståendet följer om vi kan visa att resttermen är positiv. Detta bevisas som följer. Funktionen $e^u + u$ är en strickt växande funktion av u och antar värdet 1 i punkten 0. Lösningen $y(1)$ till (1) måste därför vara positiv. Resttermen i Taylorutvecklingen av $e^{y(1)}$ är

$$R = \sum_{k=2}^{\infty} y(1)^k/k!\,,$$

vilket är positivt när $y(1)$ är positiv.

6. Låt $y_1(t)$ vara lösningen till det första problemet och $y_2(t)$ lösningen till det andra. Högerleden i bägge differentialekvationerna är icke negativa så bägge lösningarna är växande och större än $b > 0$, för $t > 0$. Genom den vanliga metoden för separabla variabler får vi lösningen till problem 2) som

$$y_2(t) = \frac{b}{1 - bt}\,,$$

vilken exploderar vid tiden $t = 1/b$. Vi vill nu visa att $y_1(t) > y_2(t)$ för $t > 0$, vilket ger att även $y_1(t)$ måste explodera för något $0 < T \leq 1/b$.
Vi har att

$$\frac{d}{dt}(-\frac{1}{y_1}) = 1 + \frac{t^2}{y_1^2} > 1 = \frac{d}{dt}(-\frac{1}{y_2})\,. \tag{3}$$

Eftersom $-1/y_1(0) = -1/b = -1/y_2(0)$ så ger (3) att

$$-\frac{1}{y_1(t)} > -\frac{1}{y_2(t)}, \qquad t > 0.$$

D v s

$$y_1(t) > y_2(t), \qquad t > 0.$$

Kungl Tekniska Högskolan
Matematiska institutionen

Tentamen
Diff o Trans för F2, 5B1202
99-08-24

Skrivtid: 5 timmar.
Hjälpmedel: Beta
3 poäng för per uppgift. Betygsgränser: 3 ≥ 9, 4 ≥ 13.5, 5 ≥ 16.5 .

Förenkla svaren så långt som möjligt.
Endast väl motiverade lösningar ger poäng.

1. Lös systemet

$$\begin{cases} y_1' = -y_1(t) + y_2(t), & y_1(0) = c_1, \\ y_2' = -2y_1(t) + y_2(t), & y_2(0) = c_2, \end{cases}$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga reella tal.
Rita ett fasporträtt för systemet, och markera riktningen hos rörelsen.

2. Lös med hjälp av Laplacetransformsmetoder följande system av ODE.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1(t) + y_2(t)\,, & y_1(0) = 1, \\ y_2' = -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-2t}, & y_2(0) = 0\,. \end{cases}$$

3. Avgör för var och ett av nedanstående system vilken typ av kritisk punkt origo är. Ange också om denna kritiska punkt är stabil eller instabil.

a) $\bar{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}(t)$

b) $\bar{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \bar{y}(t)$

c) $\bar{y}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{y}(t)$

4. Finn lösningen till följande begynnelsevärdesproblem.

$$y' = \frac{e^y}{1-t}, \qquad y(0) = b\,.$$

Ange, för varje värde på b, hur länge lösningen existerar. Vad händer vid den tidpunkt då lösningen upphör att existera.

5. Betrakta differentialekvationen

$$t^2y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0, \qquad t > 0.$$

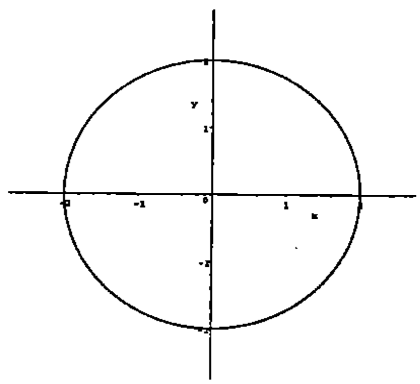
a) Finn den allmänna lösningen till denna differentialekvation.

b) Vad händer med lösningen när t går mot 0?

c) Hur hänger detta ihop med satsen om entydig existens?

Ledtråd: Använd substitutionen $s = \ln(t)$. Transformera till en differentialekvation med s som oberoende variabel istället för t, lös denna differentialekvation och transformera sedan tillbaks svaret.

6.



Bilden ovan beskriver systemet

$$\begin{aligned} x' &= -x(4 - (x^2 + y^2)) - y(x^2 + y^2), \\ y' &= -2y(4 - (x^2 + y^2)) + x(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Cirkeln i bilden beskriver den enda periodiska lösningskurvan för systemet. Den kritiska punkten $(0,0)$ är den enda kritiska punkten för systemet. Vi betraktar den lösning $\bar{y}(t)$ som startar i punkten $(3,0)$. Avgör om de följande tre påståenden är sanna eller falska. Ge en matematisk motivering i varje fall.

a) För den lösning som startar i $(3,0)$ gäller $\bar{y}(t) \to (0,0)$ när $t \to \infty$.

b) Den lösning som startar i $(3,0)$ närmar sig den periodiska banan när $t \to \infty$.

c) För den lösning som startar i $(3,0)$ gäller $\|\bar{y}(t)\| \to \infty$ när $t \to \infty$. (Här betecknar $\|\bar{v}\|$ normen av vektorn $\bar{v}$, d.v.s. längden på vektorn.)

LYCKA TILL!

Kungl Tekniska Högskolan
Matematiska institutionen

Lösningar till tentamen
Diff o Trans för F2, 5B1202/1
99-08-24

1. Systemmatrisen $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ har egenvärden $\pm i$ med tillhörande egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm i \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen blir därför

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(t)\right) + B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(t)\right). \tag{1}$$

Insättning av begynnelsevillkoren $y_1(0) = c_1$ och $y_2(0) = c_2$ ger $A = c_1$ och $B = c_2 - c_1$. Lösningen blir därför

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\cos(t) + (c_2 - c_1)\sin(t) \\ c_2\cos(t) + (c_2 - 2c_1)\sin(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Eftersom y_2' är negativ då $y_2 = 0$ och $y_1 > 0$, så sker rörelsen medurs.

2. Efter Laplacetransformering får vi

$$\begin{cases} s\tilde{y_1}(s) - y_1(0) + \tilde{y_1}(s) - \tilde{y_2}(s) = 0\,, \\ s\tilde{y_2}(s) - y_2(0) + 2\tilde{y_1}(s) - \tilde{y_2}(s) = \dfrac{1}{2+s}\,. \end{cases}$$

Eftersom $y_1(0) = 1$ och $y_2(0) = 0$ får vi

$$\begin{cases} (s+1)\tilde{y_1}(s) - \tilde{y_2}(s) = 1\,, \\ 2\tilde{y_1}(s) + (s-1)\tilde{y_2}(s) = \dfrac{1}{2+s}\,. \end{cases}$$

Gausselliminering ger

$$\tilde{y_1}(s) = \frac{1}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}\frac{-3+4s}{s^2+1}\,,$$
$$\tilde{y_2}(s) = -\frac{1}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}\frac{-7+s}{s^2+1}\,.$$

Efter inverstransformering (t ex med hjälp av Beta) får man

$$y_1(t) = \frac{1}{5}e^{(-2t)} + \frac{4}{5}\cos(t) - \frac{3}{5}\sin(t)\,,$$
$$\tilde{y_2}(s) = -\frac{1}{5}e^{(-2t)} + \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{7}{5}\sin(t)\,.$$

3.

a) Systemmatrisen i a) har egenvärdena $r = 1 \pm i\sqrt{2}$. Vi har alltså en instabil spiralpunkt.

b) Systemmatrisen i b) har egenvärdena $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$. Vi har alltså en sadelpunkt som är instabil.

c) Systemmatrisen i c) har egenvärdena $r = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Vi har alltså en stabil nod.

4. Metoden för separabla ODE ger

$$\int e^{-y} dy = \int \frac{dt}{1-t}, \tag{3}$$

vilket ger $-e^{-y} = -\ln|1-t| + C$, eller $y = -\ln(-C + \ln|1-t|)$. Insättning av $y(0) = b$ ger $C = -e^{-b}$ och

$$y(t) = -\ln(e^{-b} + \ln(|1-t|)\,. \tag{4}$$

Denna lösning existerar tills antingen $|1-t| = 0$, d v s $t = 1$ eller $e^{-b} + \ln(|1-t|) = 0$, d v s $t = 1 - e^{-e^{-b}}$. Det senare inträffar först. Lösningen existerar alltså upp till tiden $1 - e^{-e^{-b}}$, då den går mot $+\infty$.

5.

a) Substitutionen som föreslås i ledtråden leder till ekvationen

$$\frac{d^2y}{ds^2} - 2\frac{dy}{ds} + y = 0,$$

med lösning $y = (A + Bs)e^s = (A + B\ln(t))t$.

b)

$$\lim_{t\to 0}(A + B\ln(t))t = 0.$$

c) Alla lösningar blir 0 vid tiden $t = 0$. Vi har därför inte existens av lösningen till t ex begynnelsevärdesproblemet $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Detta är dock konsistent med de satser om entydighet och existens som ges i boken eftersom koefficienten framför högsta ordningens term i ekvationen är singulär vid $t = 0$.

6.

a) FALSKT: I detta fall måste lösningskurvan skära den periodiska banan, vilket är förbjudet p g a entydighet hos lösningen.

b) FALSKT: Av samma skäl som i a) stannar lösningen i området utanför den periodiska banan. Vi skriver

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

och får

$$\bar{r} \cdot \bar{r}' = (x^2 + 2y^2)(||r||^2 - 4) > 0\,.$$

Tangentvektorn för lösningskurvan pekar därför utåt och lösningen kan inte gå in mot den periodiska banan.

b) SANT: Vi vet att i två dimensioner måste lösningen antingen gå mot en kritisk punkt, mot en periodisk bana eller växa ut mot oändligheten. De två första alternativen har vi uteslutit i a) och b). Däför är påståendet i c) sant.