Extra övningsuppgifter, Diff & Trans II, del 1

1. If a particle of mass m moves in the xy plane, its equations of motions are
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,y) \quad \text{and} \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = g(t,x,y)$$
where f and g represent the x and y components, respectively, of the force acting on the particle. Replace this system by an equivalent system of first order equations.

2. Bestäm alla lösningar $(x(t), y(t))$ till
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y - 5t + 2 \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 2y - 8t - 8. \end{aligned}$$

3. Finn de funktioner $x(t)$ så att $x'' = (x')^3 + x'$.

4. (a) Undersök om $\cos(x)$ och $\sin(x)$ är linjärt oberoende funktioner. Är de lösningar till en och samma linjära differential ekvation med kontinuerliga koefficienter?

   (b) Undersök om funktionerna $f(t) = t^2|t|$ och $g(t) = t^3$ är linjärt oberoende på intervallen $-1 < t < 0$, respektive $-1 < t < 1$. Kan f och g vara lösningar till samma ekvation av typen
$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y = 0$$
där p och q är kontinuerliga på $-1 < t < 1$

5. Bestäm alla $y = y(t)$ så att $y' = \sin(t)/y$.

6. Beräkna e^{At} då
$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Describe the relation between the phase portraits of the autonomous systems $x' = F(x,y)$, $y' = G(x,y)$, and $x' = -F(x,y)$, $y' = -G(x,y)$.

8. Skissera fasporträtten till

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases} \text{(b)} \begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases} \text{(c)} \begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 5x + 2y. \end{cases}$$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} y \\ y(0) = 10. \end{cases}$$

10. Vad är dimensionen av rummet av lösningar till $y'''' + y''' + y'' + y' + 1 = 0$ som är begränsade då $t \to \infty$?

11. Let

$$L[u] = (1-t)u'' + tu' - u, \quad 0 < t < 1.$$

Note that $v = e^t$ solves the homogeneous equation $L[v] = 0$. Find the general solution of $L[u] = 2(1-t)^2 e^{-t}$.

12. Betrakta begynnelsevärdesproblemet $y'(t) = 2y(t)^{1/2}$, $y(0) = 0$ på intervallet $0 \leq t < \infty$. Visa att

$$y(t,c) = \begin{cases} (t-c)^2 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases}$$

löser problemet för varje $c > 0$ och förklara varför det finns så många lösningar.

13. Lös ekvationerna (a) $x\cos(y)y' = -x\sin(y) + 2\sin(y)$, och (b) $1 - (x^2 - xy)y' = xy$.

14. Finn den allmänna lösningen till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

15. Skriv differentialekvationen

$$x'' + 2xx' + x^2 - x = 0$$

som ett system av första ordningen. Bestäm alla jämviktspunkter och undersök deras stabilitets egenskaper.