

Fouriermetoder för F2

5B1202/II

Michael Benedicks

Inlämningsuppgift 3

1. Beräkna formellt med hjälp av Parsevals relation integralerna

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx$, där a, b reella och $a, b > 0$

b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$, a reellt, $a > 0$

c*) Hur kan man genom gränsövergångar göra resonemanget i a) strikt

2. Vilka av följande uttryck definierar en distribution i klassen \mathcal{D}'

a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \delta(x-n)$

b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \delta(x-n)$

c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2 + 10) e^{3inx}$

d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n e^{int}$

3. Bilda funktionen

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 + e^t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

Ange den distribution f , som definieras av

$$\hat{f} = g''$$

Är f en vanlig funktion?

4. Funktioner $f(t) = |t|$ för $|t| \leq \frac{1}{2}$ och

med perioden 1 har fourierserien

$$f(t) = \frac{1}{4} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ udda}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \alpha e^{2\pi i n t}.$$

a) Bestäm heltalet α .

b) Beräkna f' och f'' i distributionsmening.

5. Låt f vara 2π periodisk med

$$\begin{cases} f(t) = t - \frac{t^2}{\pi}, & 0 \leq t \leq \pi \\ f(t+\pi) = -f(t). \end{cases}$$

Skissera f, f', f'' och f''' .

Beräkna fourierserien till f genom att först beräkna f''' , fourierserietveckla f''' och därefter integrera fourierserien tre gånger.

6. Låt φ vara en testfunktion i klassen \mathcal{S}

Beräkna

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \frac{\varphi(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt.$$

Inlämnas 21/5