2. ORTOGONALA FUNKTIONSSYSTEM

2.1 Linjära funktionsrum

Ett mera geometriskt och algebraiskt synsätt har visat sig mycket fruktbart inom analysen. Idén är att uppfatta vissa mängder av funktioner som linjära rum. För den formella definitionen av linjära rum hänvisas till en lärobok i linjär algebra.

En mängd V av komplexvärda funktioner är ett linjärt rum om

(i) f och g tillhör V $\Longrightarrow$ $f+g$ tillhör V

(ii) Om f tillhör V och λ är ett komplext tal gäller att λf tillhör V.

Observera att vi i denna kurs sysslar med *komplexa skalärer*. Funktionerna $f+g$ och λf definieras givetvis av

$$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Övning 1. Är följande mängder av funktioner linjära rum över de komplexa talen?

a) Mängden av komplexvärda, begränsade funktioner på $[a,b]$.

b) Mängden av reellvärda, kontinuerliga funktioner på $[a,b]$.

c) Mängden av analytiska funktioner definierade på en öppen mängd Ω i det komplexa planet.

d) Mängden av komplexvärda, kontinuerliga funktioner f på intervallet $[a,b]$ sådana att

$$\text{(i)}\quad f(a) = 1.$$
$$\text{(ii)}\quad f(b) = 0.$$

Vi skall huvudsakligen betrakta funktionsrum bestående av kvadratiskt integrerbara funktioner.

Definition. $L^2(a,b)$ är mängden av komplexvärda funktioner på intervallet (a,b) sådana att

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx < \infty.$$

Definition. Låt $w(x) > 0$ vara en kontinuerlig funktion på intervallet (a,b). Vi kallar w en *viktsfunktion* (en *vikt*). Då är $L^2_w(a,b)$ mängden av funktioner på (a,b) sådana att

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx < \infty.$$

Anmärkning. Rummet $L^2(a,b)$ är givetvis ett specialfall av $L^2_w(a,b)$ med $w(x) \equiv 1$.

Exempel. Funktionen $f(x) = 1/\sqrt{x}$ tillhör inte $L^2[0,1]$. Däremot gäller att $g(x) = x^{-\alpha}$, $0 < x \le 1$, tillhör $L^2[0,1]$ då $0 < \alpha < 1/2$.

Anmärkning. I tillämpningarna är det viktigt att tillåta vikter, som går mot oändligheten i ändpunkterna, t ex

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vi visar att $L^2_w(a,b)$ utgör ett linjärt rum. För komplexa tal α och β gäller

$$|\alpha+\beta|^2 \le |\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) + (\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta}) = \ldots =$$
$$= 2\alpha\overline{\alpha} + 2\beta\overline{\beta} = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 .$$

Vi skriver $\alpha = f(x)$, $\beta = g(x)$ och integrerar m a p $w(x)\,dx$.

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 w(x)\,dx \le 2\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx + 2\int_a^b |g(x)|^2 w(x)\,dx.$$

Detta ger (i) ovan (följer också av sats 2.2). Ännu lättare visas (ii).

2.2 Skalärprodukter och normer

För funktioner f och g i $L^2(a,b)$ definieras deras *skalärprodukt* (*inre produkt*) genom

$$< f,g > = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt. \tag{2.1}$$

Analogt definieras skalärprodukten i $L^2_w(a,b)$ genom

$$< f,g > = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}w(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Skalärprodukten i $\mathbf{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) | z_k \in \mathbf{C}\}$ definieras på ett analogt sätt genom

$$(z,w) = \sum_{k=1}^n z_k\overline{w_k}$$

Exempel. För funktionerna $\varphi_m(t) = e^{imt}$ och $\varphi_n(t) = e^{int}$ i $L^2(0,2\pi)$ är skalärprodukten

$$< \varphi_m, \varphi_n > = \int_0^{2\pi} \varphi_m(t)\overline{\varphi_n(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{imt-int}\,dt = \begin{cases} 2\pi, & m = n \\ 0, & m \ne n. \end{cases}$$

Funktionerna φ_m och φ_n är ortogonala då $m \ne n$. Detta skrives $\varphi_m \perp \varphi_n$.

Anmärkning. I t ex kvantmekanik definieras oftast skalärprodukten med komplexkonjugering på första faktorn.

Att $< f,g >$ är definierad för f och g i $L^2(a,b)$ är inte självklart. För att visa att $f\overline{g}$ är absolutintegrabel om f och $g \in L^2(a,b)$ utnyttjar vi olikheten

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2},$$

som gäller då α och β är reella tal. Med $\alpha = |f(x)|$ och $\beta = |g(x)|$ fås

$$|f(x)\overline{g(x)}| = |f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{|f(x)|^2}{2} + \frac{|g(x)|^2}{2}. \tag{2.3}$$

Då olikheten (2.3) integeras fås

$$\int_a^b |f(x)\overline{g(x)}|\,dx \leq \int_a^b \frac{|f(x)|^2}{2}\,dx + \int_a^b \frac{|g(x)|^2}{2}\,dx < \infty, \tag{2.4}$$

och beviset är slutfört. Fallet $L^2_w(a,b)$ är analogt.

Skalärprodukten $<\cdot,\cdot>$ har följande egenskaper

a) $< f+g, h > = < f,h > + < g,h >$
b) $< \alpha f, g > = \alpha < f,g >$
c) $< f,g > = \overline{< g,f >}$
d) $< f,f > \geq 0$
e) $< f,f > = 0 \Longrightarrow f = 0,$

där α är ett komplext tal och f,g och h är element i $L^2(a,b)$ respektive $L^2_w(a,b)$. Vidare gäller
f) $< f, g+h > = < f,g > + < f,h >$
g) $< f, \alpha g > = \overline{\alpha} < f,g >$.

Nu kan man definiera en abstrakt skalärprodukt på ett linjärt rum över de komplexa talen genom att kräva att a) – e) skall vara uppfyllda. Det gäller till exempel att f) följer av a) och c) och att g) följer av b) och c). Ett sådant rum brukar kallas ett *inreproduktrum*.

För en funktion $f \in L^2_w(a,b)$ definierar man dess norm $\|f\|$ genom

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx}.$$

Allmänt kan man definiera en norm $\|\cdot\|$ på ett vektorrum V över de komplexa talen genom att kräva

(i) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$
(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
(iii) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

då x och y tillhör V och α är ett komplext tal. (i) och (iii) är lätta att bevisa för $L^2_w(a,b)$. För att bevisa triangelolikheten (ii) visar vi först

Sats 2.1 (Cauchys olikhet, Schwarz' olikhet). *Uti inreproduktrum gäller olikheten*

$$|< f,g >| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \tag{2.5}$$

Konkret innebär (2.5) i fallet L^2_w att

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}w(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 w(t)\,dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2 w(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Bevis. Vi genomför beviset i fallet $L^2(a,b)$. Vi ser att olikheten gäller då $f=0$ eller $g=0$, ty då är både vänster och höger led i (2.5) lika med 0. Utan inskränkning kan vi därför anta att $\|f\| \neq 0$ och $\|g\| \neq 0$.

Låt $f_1 = \dfrac{f}{\|f\|}$ och $g_1 = \dfrac{g}{\|g\|}$. Då f_1 och g_1 insättes i (2.4) fås

$$
\begin{aligned}
|< f_1, g_1 >| &\leq \int_a^b \left| f_1(t)\overline{g_1(t)} \right| dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_a^b |f_1(t)|^2\, dt + \frac{1}{2}\int_a^b |g_1(t)|^2\, dt \\
&= \frac{1}{2}\|f_1\|^2 + \frac{1}{2}\|g_1\|^2 = 1,
\end{aligned}
$$

d v s

$$\left| < \frac{f}{\|f\|}, \frac{g}{\|g\|} > \right| \leq 1.$$

Efter multiplikation med $\|f\|\ \|g\|$ fås nu (2.5). ∎

Sats 2.2 (Triangelolikheten). *Om f och g tillhör $L^2(a,b)$ respektive $L^2_w(a,b)$ gäller*

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|. \tag{2.6}$$

Bevis.

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= < f+g, f+g > \\
&= < f,f > + < f,g > + < g,f > + < g,g > \\
&= \|f\|^2 + < f,g > + \overline{< f,g >} + \|g\|^2 \\
&= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re} < f,g > + \|g\|^2 \\
&\leq \|f\|^2 + 2|< f,g >| + \|g\|^2.
\end{aligned}
$$

Men enligt Cauchys olikhet är $|< f,g >| \leq \|f\|\ \|g\|$ och därför är

$$\|f+g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

Påstående (2.6) följer nu genom att dra kvadratroten ur båda leden. ∎

Definition. Om för två vektorer f och g i ett linjärt rum med inre produkt gäller att

$$< f,g > = 0$$

kallas f och g *ortogonala*, skrives $f \perp g$. Vi har följande generalisering av Pythagoras' sats:

$$\textit{Om } f \perp g \textit{ är } \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \tag{2.7}$$

Bevis.

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= < f+g, f+g > \\
&= \|f\|^2 + < f,g > + < g,f > + \|g\|^2 \\
&= \|f\|^2 + \|g\|^2.
\end{aligned}
$$
∎

Detta kan lätt generaliseras till N vektorer $\{f_k\}_{k=1}^N$.

Sats 2.3. *Om en uppsättning vektorer* $\{f_k\}_{k=1}^N$ *uppfyller*

$$< f_j, f_k > = 0 \quad \text{då } j \neq k$$

gäller att

$$\left\| \sum_{k=1}^N f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^N \|f_k\|^2.$$

Beviset lämnas som övning. (Jämför beviset för Parsevals relation för fourierserier.)

2.3 Ortogonalsystem och ON-system

Definition. En uppsättning vektorer $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ i ett inreproduktrum kallas ett *ortogonalsystem* om

$$< f_m, f_n > = 0 \text{ då } m \neq n. \tag{2.8}$$

Systemet kallas ett *ortonormalsystem* (*ON-system*) om dessutom $\|f_n\| = 1$ för $n = 1, 2, \ldots$.

Ett ortogonalsystem $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ kan alltid göras om till ett ON-system $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ genom att *normera* vektorerna f_n och sätta

$$\varphi_n = \frac{f_n}{\|f_n\|} \quad n = 1, 2, \ldots$$

De mest klassiska exemplen på ON-system är de som uppträder i samband med fourierserier.

Exempel. Betrakta

$$\varphi_n(t) = e^{int}, \quad n \text{ heltal},$$

i $L^2_w(0, 2\pi)$ med vikt $w(t) = 1/2\pi$. Skalärprodukten är

$$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Vi får

$$\begin{aligned} < \varphi_m, \varphi_n > &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt}\overline{e^{int}}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt - int}\, dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Övning 2. Visa att systemet $\{1, \sin nt, \cos nt\}_{n=1}^\infty$ är ett ortogonalsystem i $L^2(0, 2\pi)$. Vad blir motsvarande ON-system?

Övning 3. Hur ser ON-systemen, som motsvarar ortogonalsystemen

$$\{e^{int}\}_{n=-\infty}^\infty$$

och

$$\{1, \sin nt, \cos nt\}_{n=1}^{\infty},$$

ut för $L^2(0,T)$?

Övning 4. Visa att $\{\sin(n+\frac{1}{2})t\}_{n=0}^{\infty}$ är ett ortogonalsystem på $L^2(0,\pi)$.

Idén med allmänna ON-system är att utveckla funktioner i dem i summor analoga med vanliga fourierutvecklingar. Då $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är ett ON-system vill vi, för en given funktion f, skriva

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{2.9}$$

I nästa avsnitt skall vi se på åtskilliga nya exempel på ortogonalsystem, t ex Legendrepolynom, Laguerrepolynom, Hermitepolynom och Besselfunktioner. Många av dessa uppträder i samband med randvärdesproblem för partiella differentialekvationer, som är naturliga i fysiken.

Låt oss här emellertid fortsätta med den mer abstrakta teorin. Det första problemet som uppstår är: Hur bör koefficienterna $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ i (2.9) väljas? Genom att skalärmultiplicera med φ_m i (2.9) fås formellt

$$\begin{aligned} < f, \varphi_m > &= < \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \varphi_m > \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \varphi_n, \varphi_m > = c_m. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Vi har inte på något sätt verifierat att omkastningen av summation och skalärprodukt är tillåten. Kalkylen tillåter oss dock att gissa att c_n bör väljas som $< f, \varphi_n >$. Vi måste då senare verifiera att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n > \varphi_n(x).$$

Talen $< f, \varphi_n >$ kallas f:s fourierkoefficienter i systemet $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

I praktiken vill man ofta försöka approximera en given funktion med ett ändligt antal funktioner $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ ur ett ON-system.

Problem. Givet funktionen $f \in L^2_w(a,b)$ och ett ON-system $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$. Hur skall koefficienterna $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ väljas så att

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n \right\|_{L^2_w} \tag{2.11}$$

minimeras? Mera konkret kan problemet uttryckas: Minimera

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 w(x)\, dx.$$

Detta brukar kallas approximation i kvadratiskt medel. Vi får

$$\begin{aligned}\left\| f-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n \right\|^2 &= < f-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n, f-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n > \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} c_n < \varphi_n, f > - \sum_{n=1}^{N} \overline{c_n} < f, \varphi_n > + \sum_{n=1}^{N} c_n\overline{c_n} < \varphi_n, \varphi_n > \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} \left[2\mathrm{Re}\, c_n\overline{< f,\varphi_n >} - |c_n|^2\right] \\ &= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |< f,\varphi_n > - c_n|^2 - \sum_{n=1}^{N} |< f,\varphi_n >|^2 .\end{aligned} \tag{2.12}$$

Minimum erhålles således då $c_n = < f, \varphi_n >$, d v s c_n skall väljas som f:s fourierkoefficienter i systemet $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$. Vi har visat följande sats som vi formulerar för allmänna inreproduktrum.

Sats 2.4. *Låt V vara ett inreproduktrum och låt vektorn f och ON-systemet $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ vara givna. Då minimeras uttrycket*

$$\left\| f-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n \right\|^2$$

då $c_n = < f, \varphi_n >$. Minimum är

$$\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |< f,\varphi_n >|^2 . \tag{2.13}$$

(Att uttrycket i formel (2.13) är minimum följer genom insättning av $c_n = < f,\varphi_n >$ i (2.12).)

Sats 2.4 har en viktig geometrisk tolkning. Vektorerna $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ spänner upp ett hyperplan Π.

$$\Pi = \{\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n : c_n \in \mathbf{C}\}$$

Den bästa approximationen f^* till f som ligger i Π är

$$f^* = \sum_{n=1}^{N} < f,\varphi_n > \varphi_n,$$

som erhålles genom vinkelrät (ortogonal) projektion av f på planet Π. (Se figur på omstående sida.)

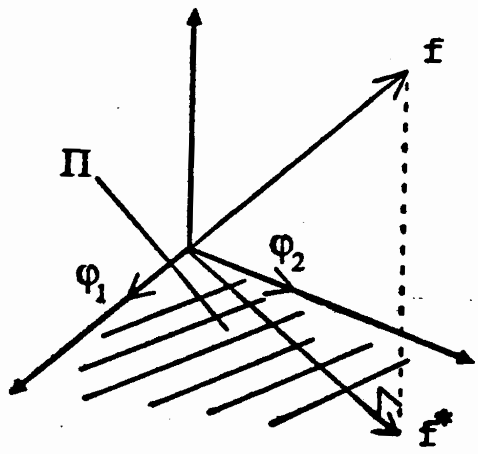
Eftersom uttrycket

$$\left\| f-\sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n \right\| \geq 0$$

är även dess minimum ≥ 0. Från (2.13) fås

$$\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |< f,\varphi_n >|^2 \geq 0. \tag{2.14}$$

Då $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är ett oändligt ON-system fås då $N \to \infty$ i (2.14) följande



Sats 2.5 (Bessels olikhet). *Låt* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vara ett ON-system. Då gäller*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |<f,\varphi_n>|^2 \leq \|f\|^2.$$

Exempel. Finn c_0, c_1 och c_2 så att

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|t - c_0 - c_1 e^{it} - c_2 e^{2it}\right|^2 dt$$

minimeras och beräkna minimum.

Lösning. Talen c_0, c_1 och c_2 bör väljas som fourierkoefficienter för funktionen t. Med $\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = e^{it}$ och $\varphi_2(t) = e^{2it}$ fås

$$c_0 = <t,\varphi_0> = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt = \pi.$$

$$\begin{aligned} c_1 = <t,\varphi_1> &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-it}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-it}}{-i}t\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-it}}{i}\,dt \\ &= i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 = <t,\varphi_2> &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-i2t}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i2t}}{-2i}t\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i2t}}{2i}\,dt \\ &= \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Enligt (2.13) blir minimum med $f(t) = t$

$$\|f\|^2 - |c_0|^2 - |c_1|^2 - |c_2|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,dt - \pi^2 - 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{3} - \pi^2 - 1 - \frac{1}{4} \approx 2.04.$$

■

En avgörande fråga är givetvis:

Låt ett ortogonalsystem $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $L^2_w(a,b)$ vara givet. När och i vilken mening konvergerar fourierserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n > \varphi_n(x)$$

mot en funktion f. Vi skall diskutera konvergens i norm, d v s om

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} < f, \varphi_n > \varphi_n \right\| \to 0$$

då $N \to \infty$. Problemet är väsentligen om någon av "riktningarna" saknas. Om vi från det trigonometriska systemet $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ skulle utesluta e^{ix} skulle inte t ex

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

kunna approximeras av de övriga funktionerna $\{e^{inx}; n \neq 1\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Sats 2.6. *Låt $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara ett ON-system i $L^2_w(a,b)$. Då är följande egenskaper ekvivalenta:*

(i) $\left\| \sum_{n=1}^{N} < f, \varphi_n > \varphi_n - f \right\| \to 0$ då $N \to \infty$
för alla f i $L^2_w(a,b)$.

(ii) *Parsevals relation 1 gäller för alla $f \in L^2_w(a,b)$,*
$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< f, \varphi_n >|^2.$

(iii) *Parsevals relation 2 gäller för alla f och g i $L^2_w(a,b)$,*
$< f, g > = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n > \overline{< g, \varphi_n >}.$

(iv) *Den enda funktion i $L^2_w(a,b)$ som är ortogonal mot alla $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är nollfunktionen, d v s*
$< f, \varphi_n > = 0$ *för alla* $n \Longrightarrow f = 0$.

Om ett ON-system uppfyller någon (och därmed alla) av de ekvivalenta relationerna (i)—(iv) kallas det *fullständigt* (stundom *komplett*). Man säger att $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *spänner upp* rummet $L^2_w(a,b)$.

Bevisskiss. Att (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) följer av identiteten

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} < f, \varphi_n > \varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |< f, \varphi_n >|^2,$$

jfr formel (2.13) med $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$. Att (iii) $\Longrightarrow$ (ii) är självklart. Beviset av (ii) $\Longrightarrow$ (iii) går till på följande sätt: Låt $a_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ och $b_n = \langle g, \varphi_n \rangle$. Då är enligt (ii)

$$\|f + \lambda g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + \lambda b_n|^2, \text{ d v s}$$

$$\|f\|^2 + \lambda \langle g, f \rangle + \overline{\lambda} \langle f, g \rangle + |\lambda|^2 \|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{a_n} + \overline{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n} + |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Genom att välja $\lambda = 1$ och $\lambda = i$ ser vi nu att $\langle f, g \rangle$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ har samma real- och imaginärdelar och de är därför lika, d v s

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \overline{\langle g, \varphi_n \rangle}.$$

Slutligen gäller (ii) $\Longrightarrow$ (iv), vilket lätt inses. Det återstår att visa att (iv) medför något av de övriga påståendena t ex (i). Detta är enkelt men kräver att vi använder Lebesgueintegral för att få $L^2_w(a,b)$ komplett, d v s att åstadkomma att varje Cauchyföljd i $L^2_w(a,b)$ är konvergent. Vi utelämnar därför denna del av beviset. ∎

Vi har visat egenskap (ii) och (iv) för systemet $\{e^{int}\}$ på intervallet $[0, 2\pi]$ (sats 1.8 och sats 1.5; dock bara bevisade för kontinuerliga funktioner). Härav följer

Sats 2.7. *Systemet* $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *är ett fullständigt ON-system på* $L^2_w(0, 2\pi)$ *med* $w(x) = \frac{1}{2\pi}$.

Från Sats 2.7 är det inte svårt att visa

Sats 2.8. *Systemen* $\{e^{in\Omega t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *och* $\{1, \sin n\Omega t, \cos n\Omega t\}_{n=1}^{\infty}$ *är fullständiga ortogonalsystem på* $L^2(a,b)$, *där* $T = b - a$ *och* $\Omega = 2\pi/T$.

Detta innebär att Parsevals relationer måste gälla för dessa system. Vi får efter diverse variabelbyten

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)\overline{g(t)} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} |f(t)|^2 \, dt = \left|\frac{a_0}{2}\right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

$$\frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t)\overline{g(t)} \, dt = \frac{a_0(f)}{2} \frac{\overline{a_0(g)}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)},$$

där

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{-in\Omega t}\,dt$$

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos n\Omega t\,dt$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\sin n\Omega t\,dt$$

och $\Omega = 2\pi/T$. Talen $c_n(g), a_n(g)$ och $b_n(g)$ är givetvis motsvarande fourierkoefficienter för g.

2.4 Ortogonalisering

Av ovanstående framgår att det är önskvärt att ha ortogonala funktionssystem och ännu hellre ortonormala. Antag att man har en uppsättning funktioner $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ som *spänner upp* $L^2_w(a,b)$, d v s varje funktion f i $L^2_w(a,b)$ kan approximeras godtyckligt noggrant med linjärkombinationer

$$\sum_{n=1}^{N} c_n f_n$$

i L^2_w-norm. Man vill nu ersätta $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ med ett ON-system $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, som också spänner upp $L^2_w(a,b)$.

Sats 2.9 (Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess). *Antag att $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd av linjärt oberoende funktioner i rummet $L^2_w(a,b)$ som spänner upp $L^2_w(a,b)$. Då kan man finna ett ortogonalsystem $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ som spänner upp $L^2_w(a,b)$ och ett ON-system $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ som spänner upp $L^2_w(a,b)$.*

Bevis.
Steg 1. Sätt först $g_1 = f_1$ och

$$\varphi_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}.$$

Steg 2. Tag sedan f_2 och drag bort f_2:s komponent i φ_1:s riktning. Bilda

$$g_2 = f_2 - \langle f_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1.$$

Då blir $g_2 \perp \varphi_1$. Vi normerar nu och sätter

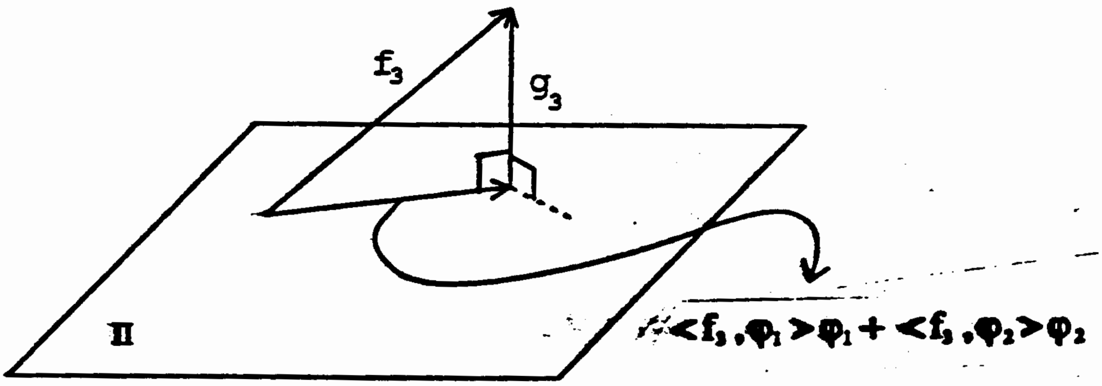
$$\varphi_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}.$$

Steg 3. Tag f_3 och subtrahera bort f_3:s komponenter i φ_1 och φ_2:s riktningar. Bilda

$$g_3 = f_3 - \langle f_3, \varphi_1 \rangle \varphi_1 - \langle f_3, \varphi_2 \rangle \varphi_2.$$

Då blir g_3 ortogonal mot φ_1 och φ_2.

Tolkning av steg 3. Vektorerna φ_1 och φ_2 spänner upp ett plan Π. Vektorn f_3 ligger inte i detta plan. Bilda $g_3 = f_3$ *minus* f_3:s komponent i planet Π.



Steg n. I det n:te steget bildar vi

$$g_n = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} < f_n, \varphi_k > \varphi_k.$$

Då blir $g_n \perp \varphi_k$ för $k = 1, 2, \ldots, n-1$, och φ_n definieras som $\varphi_n = g_n / \|g_n\|$.

Eftersom $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är linjärt oberoende blir aldrig $g_k = 0$. Det är klart att $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ blir ett ortogonalsystem som vid normering övergår i ON-systemet $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vidare gäller för varje N att $\{f_n\}_{n=1}^{N}$, $\{g_n\}_{n=1}^{N}$ och $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ spänner upp (d v s utgör baser för) samma rum. ∎

I praktiken är det enklare att beräkna g_k utan att införa $\{\varphi_n\}$. Man sätter bara

$$\begin{aligned}
g_1 &= f_1 \\
g_2 &= f_2 - \frac{< f_2, g_1 >}{< g_1, g_1 >} g_1 \\
g_3 &= f_3 - \frac{< f_3, g_1 >}{< g_1, g_1 >} g_1 - \frac{< f_3, g_2 >}{< g_2, g_2 >} g_2 \\
g_n &= f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{< f_n, g_k >}{< g_k, g_k >} g_k.
\end{aligned}$$

Detta kallas att *ortogonalisera* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Övning 5. Genomför Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess för funktionerna $\{1, t, t^2\}$ i rummet $L^2[0,1]$.

2.5 Några speciella ortogonala funktionssystem

Vi skall nu beskriva några särskilt vanliga och användbara ortogonala funktionssystem i rummet $L^2_w(a,b)$ med inre produkten

$$< f, g > = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}w(t)\,dt; \quad (f, g \in L^2_w(a,b)).$$

De uppkommer t ex då man ortogonaliserar polynom $1, t, t^2, \ldots$ m h a Gram-Schmidts process.

(i) Om $(a,b) = (-1,1)$ och $w(t) \equiv 1$ över $(-1,1)$ fås de s k *Legendrepolynomen* $P_n(t)$,

$$\begin{cases} P_0(t) = 1, \\ P_1(t) = t, \\ P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right), \quad n = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Standardiseringen är $P_n(1) = 1$, $n = 0,1,2,\ldots$. Polynomen $P_n(t)$ uppfyller ortogonalitetsrelationen

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)P_n(t)\,dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{kn},$$

och med $u(t) = P_n(t)$ Legendres differentialekvation

$$(1-t^2)u''(t) - 2tu'(t) + n(n+1)u(t) = 0.$$

(ii) Om $(a,b) = (-1,1)$ och $w(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$, $-1 < t < 1$, får vi de s k *Tjebysjovpolynomen* $T_n(t)$,

$$\begin{cases} T_0(t) = 1, \\ T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

eller

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi \quad \text{för } n = 0,1,2,\ldots.$$

Polynomen $T_n(t)$ uppfyller ortogonalitetsrelationen

$$\int_{-1}^{1} T_k(t)T_n(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \begin{cases} \pi, & k = n = 0 \\ \pi/2, & k = n \ne 0 \\ 0, & k \ne n, \end{cases}$$

och med $u(t) = T_n(t)$ Tjebysjovs differentialekvation (Tjebysjóv, Chebyshev, Čebyšëv,...)

$$(1-t^2)u''(t) - tu'(t) + n^2u(t) = 0, \quad -1 < t < 1.$$

(iii) Om $(a,b) = (0,\infty)$ och $w(t) = e^{-t}$, $0 < t < \infty$, får vi de s k *Laguerrepolynomen* $L_n(t)$,

$$\begin{cases} L_0(t) = 1 \\ L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t}t^n\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

som uppfyller ortogonalitetsrelationen

$$\int_{0}^{\infty} L_k(t)L_n(t)e^{-t}\,dt = \delta_{kn}$$

och med $u(t) = L_n(t)$ Laguerres differentialekvation

$$tu''(t) + (1-t)u'(t) + nu(t) = 0, \quad 0 < t < \infty.$$

(iv) Om $(a,b) = (-\infty,\infty)$ och $w(t) = e^{-t^2}$, $-\infty < t < \infty$, får vi de s k *Hermitepolynomen* $H_n(t)$,

$$\begin{cases} H_0(t) = 1 \\ H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \dfrac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right), & n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

som uppfyller ortogonalitetsrelationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k(t)H_n(t)e^{-t^2}\,dt = n!2^n\sqrt{\pi}\delta_{kn}$$

och med $u(t) = H_n(t)$ Hermites differentialekvation

$$u''(t) - 2tu'(t) + 2nu(t) = 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

Anmärkning. Dessa ovan nämnda polynom har andra viktiga egenskaper som läsaren finner i formelsamlingen. En varning: Speciellt äldre böcker har ibland andra definitioner för T_n, L_n och H_n.

Legendrepolynomen, $P_n(t)$ $n \geq 0$, bildar som nämnts ett ortogonalsystem på intervallet $(-1,1)$. Vi kan emellertid genom en enkel modifiering av Legendres polynom konstruera ortogonalpolynom för vilket *ändligt* intervall som helst. Ty om vi i integralen

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)P_n(t)\,dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{kn} \tag{2.15}$$

gör en substitution

$$t = \frac{x-b}{a},$$

där $a > 0$ och b är konstanter, får vi

$$\int_{b-a}^{b+a} P_n\left(\frac{x-b}{a}\right)P_k\left(\frac{x-b}{a}\right)dx = \frac{2a}{2n+1}\delta_{kn}. \tag{2.16}$$

Polynomen $P_n((x-b)/a)$, $n \geq 0$, bildar alltså ett ortogonalsystem på intervallet $(b-a, b+a)$. Normeringsfaktorerna är lika med $2a/(2n+1)$. Vill vi t ex ha ortogonalpolynom på intervallet $(0,1)$ så skall vi ha

$$(b-a, b+a) = (0,1)$$

d v s

$$\begin{cases} b - a = 0 \\ b + a = 1 \end{cases}$$

varav

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \end{cases}.$$

Ortogonalpolynomen för intervallet $(0,1)$ är alltså

$$P_n\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = P_n(2x-1), \quad n \geq 0.$$

Övning 6. Visa att (2.15) övergår i (2.16) med substitutionen ovan.

3. STURM-LIOUVILLEPROBLEM

3.1 Introduktion

Ett fundamentalt sätt på vilket man kan erhålla ortogonala funktionssystem är via *Sturm-Liouville-problem*. De uppkommer naturligt då man löser partiella differentialekvationer med variabelseparation. Låt oss betrakta ett exempel, som går tillbaka på Fouriers ursprungliga artikel.

Exempel. Låt $u(x,t)$ representera temperaturen i en stav av längd L vars båda ändar hålls vid konstant temperatur 0. Temperaturen antas uppfylla *värmeledningsekvationen*

$$\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

där κ är en materialberoende konstant. Vi söker temperaturen $u(x,t)$ med begynnelsetemperaturen $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le L$, given. Efter lämpligt val av tids- och längdskala leds man till följande matematiska problem:
Sök en funktion $u(x,t)$, $t > 0$, $0 \le x \le \pi$ som uppfyller den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.1}$$

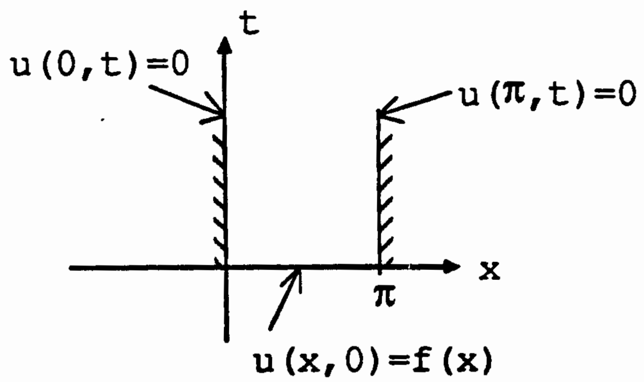
randvillkoren

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \tag{3.2}$$

samt *begynnelsevillkoret*

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.3}$$

där $f(x)$ är en given kontinuerlig funktion.



Låt oss, liksom vi gjorde i kapitel 1, först söka en lösning på formen

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{3.4}$$

som uppfyller ekvationen (3.1) samt de homogena randvillkoren (3.2). Vi får

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \tag{3.5}$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \tag{3.6}$$

Vi söker tills vidare en formell lösning vars riktighet kan verifieras senare och får efter division med $X(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}. \tag{3.7}$$

Vänsterledet i (3.7) beror nu enbart av x och högerledet enbart av t. Detta innebär att båda led är konstanta, t ex lika med $-\lambda$,

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda. \tag{3.8}$$

Detta ger *två* egenvärdesproblem med *samma* λ. Från (3.6) och (3.8) fås problemet

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 \le x \le \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Detta är vårt första problem av Sturm-Liouvilletyp. Den formella definitionen av dessa problem följer senare. Från (3.8) fås dessutom ekvationen

$$T' + \lambda T = 0,$$

som har lösningen

$$T(t) = Ce^{-\lambda t}. \tag{3.10}$$

Vi ser att om $\lambda < 0$ är $T(t)$ exponentiellt växande, vilket förefaller orimligt av fysikaliska skäl; därav valet av konstanten $-\lambda$ i (3.8). Vi tillåter emellertid λ vara ett komplext tal.

Ekvation (3.9) har lösningen

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Villkoret $X(0) = 0$ medför att $A = 0$, och från villkoret $X(\pi) = 0$ följer att $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ och vi får att $\sqrt{\lambda} = n$, n heltal. Detta är den enda lösningen även för komplexa λ. Vi får att $\lambda = n^2$ och kan utan inskränkning anta att n är ett positivt heltal. Problemet (3.9) är således endast lösbart för diskreta värden på λ, *egenvärdena* $\lambda = \lambda_n = n^2$. Motsvarande lösningar är *egenfunktionerna*

$$X_n(x) = B_n \sin nx$$

och från (3.10) fås

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2 t}.$$

Vi ser att det för varje n existerar en unik (så när som på amplituden b_n) lösning

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin nx,$$

som satisfierar differentialekvationen (3.1) samt randvillkoren (3.2). Eftersom ekvationen är linjär och randvillkoren är homogena gäller att även linjärkombinationer av egenfunktionerna är möjliga lösningar. Vi gör därför ansatsen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, e^{-n^2 t}. \tag{3.11}$$

Nu återstår endast frågan om dessa lösningar är "tillräckligt många" för att även begynnelsevillkoret (3.3) skall kunna satisfieras. Om vi formellt sätter in $t = 0$ i (3.11) fås

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{3.12}$$

Kan konstanterna b_n väljas så att likheten i (3.12) gäller?

Vi vet att $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ är ett ortogonalsystem i $L^2[0,\pi]$ med vikt $w(x) = 1$, ty

$$\begin{aligned} < X_n, X_m > &= \int_0^{\pi} X_n(x)\overline{X_m(x)}\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\delta_{nm}. \end{aligned}$$

Detta innebär (jfr (2.10)) att b_n måste väljas som

$$b_n = \frac{< f, X_n >}{< X_n, X_n >} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx. \tag{3.13}$$

Problemet är om detta val av konstanterna b_n räcker för att likheten i (3.12) skall gälla för "alla" funktioner $f(x)$. Med andra ord: Är $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ ett fullständigt ortogonalsystem? Svaret är ja och det visar sig att detta är *en allmän egenskap för egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblem.*

I vårt speciella fall kan man inse fullständigheten på följande sätt: Definiera den *udda utvidgningen* $F(x)$ av $f(x)$ genom att sätta

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Nu är enligt sats 2.8 systemet $\left\{1, \{\sin nx, \cos nx\}_{n=1}^{\infty}\right\}$ ett fullständigt ON-system i rummet $L^2[-\pi,\pi]$. Det betyder att

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

i rummet $L^2[-\pi,\pi]$, där

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\,dx = [F \text{ udda}] = 0$$

och

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = b_n$$

enligt (3.13). Men om nu

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

i rummet $L^2[-\pi,\pi]$, så får vi genom att inskränka oss till intervallet $[0,\pi]$ att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

där konvergensen tolkas i $L^2[0,\pi]$–norm.

3.2 Allmänna Sturm-Liouvilleproblem

Betrakta differentialekvationen

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) + \lambda W(x)y(x) = 0, \quad a \le x \le b, \tag{3.14}$$

med randvillkor

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Vi söker icke-triviala lösningar till (3.14) sådana att randvillkoren (3.15) är uppfyllda. Detta är ett exempel på ett *Sturm-Liouvilleproblem.*

Anmärkning. I vårt problem (3.9) är $P(x) = Q(x) = a_2 = b_2 = 0$ och $W(x) = a_1 = b_1 = 1$.

Av tekniska skäl vill man ofta skriva Sturm-Liouville-ekvationen (3.14) på s k *självadjungerad form*, vilket sker enligt följande. Genom multiplikation med den integrerande faktorn $p(x) = \exp\{\int^x P(t)\,dt\}$ får ekvationen formen

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + [q(x) + \lambda w(x)]y(x) = 0 \tag{3.16}$$

och Sturm-Liouvilleproblemet kan skrivas

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y + \lambda w(x)y = 0, \quad a \le x \le b \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

För att få bättre förståelse för Sturm-Liouvilleproblem visar det sig lämpligt att införa några begrepp från linjär algebra och funktionalanalys och därefter bevisa en allmän sats.

Låt H vara ett linjärt rum med komplexa skalärer och där elementen betecknas med f, g, och anta att det finns en skalärprodukt $< f, g >$ definierad på H. Ett sådant rum brukar kallas ett *inre-produkt-rum*.

(i) En linjär avbildning $A : H \to H$ med *definitionsområde* $D(A) \subset H$ kallas för en *linjär operator* på H.

(ii) A säges vara *symmetrisk* om $< Af, g > = < f, Ag >$ för alla $f, g \in D(A)$.

Sats 3.1. *Låt A vara en symmetrisk operator på H. Då gäller:*

(i) *Egenvärdena till A är reella.*

(ii) *Egenvektorer svarande mot olika egenvärden är ortogonala.*

Bevis. Antag att $f \neq 0$ och $g \neq 0$ är egenvektorer med egenvärden λ resp μ, d v s

$$\begin{cases} Af = \lambda f \\ Ag = \mu g. \end{cases}$$

Eftersom λ och μ är skalärer gäller

$$< Af, g > = < \lambda f, g > = \lambda < f, g > .$$

Vi har också att

$$< Af, g > = < f, Ag > = < f, \mu g > = \overline{\mu} < f, g > .$$

Ur detta följer att $\lambda < f, g > = \overline{\mu} < f, g >$ eller

$$(\lambda - \overline{\mu}) < f, g > = 0. \tag{3.18}$$

(i) Sätt $f = g$. Då är också $\lambda = \mu$ och

$$(\lambda - \overline{\lambda}) < f, f > = (\lambda - \overline{\lambda}) \|f\|^2 = 0.$$

Eftersom $\|f\| \neq 0$ är $\lambda = \overline{\lambda}$, d v s λ är reell.

(ii) Vi kan nu skriva (3.18) som

$$(\lambda - \mu) < f, g > = 0.$$

Om nu $\lambda \neq \mu$ är $< f, g > = 0$, d v s egenvektorerna f och g är ortogonala. ∎

För att kunna använda dessa resultat måste vi kunna associera en symmetrisk operator A med definitionsområde $D(A)$ till Sturm-Liouvilleproblemet (3.17). Detta går till på följande sätt: Låt $L^2_w(I)$, liksom i kapitel 2, beteckna mängden av alla kontinuerliga funktioner $u(x)$, definierade på intervallet $I = (a, b)$, för vilka integralen $\int_a^b |u(x)|^2 w(x)\,dx$ existerar ändligt. Låt vidare skalärprodukten $< u, v >$ definieras enligt

$$< u, v > = \int_a^b u(x)\overline{v(x)} w(x)\,dx, \qquad u, v \in L^2_w(I).$$

Slutligen införes

$$W(u, \overline{v}) = u\overline{v}' - u'\overline{v} = \begin{vmatrix} u & \overline{v} \\ u' & \overline{v}' \end{vmatrix}, \tag{3.19}$$

som brukar kallas *Wronski-determinanten* för funktionerna u och $\overline{v}$.

En jämförelse mellan egenvärdesekvationen $Af = \lambda f$ och Sturm-Liouville-ekvationen på självadjungerad form (3.16) visar att operatorn A bör skrivas som

$$A = -\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q\right),$$

d v s

$$\begin{aligned} Af &= -\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q\right) f = -\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{df}{dx}\right) + qf\right) \\ &= -\frac{1}{w}((pf')' + qf) = -\frac{1}{w}(pf'' + p'f' + qf). \end{aligned}$$

Den centrala poängen i Sturm-Liouvilleteorin är att man väljer definitionsområdet $D(A)$ så att A blir symmetrisk.

Sats 3.2. *Låt $I = [a,b]$ vara ett kompakt intervall och antag att*

(i) $p \in C^1(I)$, $q, w \in C(I)$, *p ej identiskt lika med 0, $w(x) \geq \delta > 0$ på I.*

(ii) $A = -\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q\right)$.

(iii) *Operatorn A har ett definitionsområde $D(A)$ sådant att om $u, v \in D(A)$ gäller*

(α) $u, v \in C^2(I)$,

(β) $Au, Av \in L^2_w(I)$,

(γ) $p(a)W(u,\bar{v})(a) = p(b)W(u,\bar{v})(b)$.

Då är A en symmetrisk operator.

Bevis. Antag att u och v tillhör $D(A)$. Då gäller att

$$\begin{aligned} < Au, v > &= \int_a^b -\frac{1}{w}\Big(\frac{d}{dx}(pu') + qu\Big)\bar{v}w\,dx \\ &= \int_a^b -\Big(\frac{d}{dx}(pu') + qu\Big)\bar{v}\,dx \\ &= -\Big[pu'\bar{v}\Big]_a^b + \int_a^b (pu'\overline{v'} - qu\bar{v})\,dx. \end{aligned}$$

På liknande sätt fås

$$< u, Av > = -\Big[pu\overline{v'}\Big]_a^b + \int_a^b (pu'\overline{v'} - qu\bar{v})\,dx.$$

Härav följer den s k *Greens formel*

$$< Au, v > - < u, Av > = \Big[p(x)W(u,\bar{v})(x)\Big]_a^b \tag{3.20}$$

Nu valdes emellertid $D(A)$ sådant att

$$p(a)W(u,\bar{v})(a) = p(b)W(u,\bar{v})(b).$$

Därför gäller att

$$< Au, v > - < u, Av > = 0$$

för alla $u, v \in D(A)$, d v s A är symmetrisk. ∎

Kraven på $D(A)$ i sats 3.2 kan uppfyllas på flera sätt. Följande fem fall visar sig vara speciellt viktiga i tillämpningarna.

(i) Om $p(a) = p(b) = 0$ så behövs inga speciella villkor på u och v, och vi kan välja

$$D(A) = \{u \in C^2[a,b] : Au \in L^2_w[a,b]\}.$$

(ii) Om $p(a) = 0$, $p(b) \neq 0$ behövs något villkor på u och v i punkten b. Vi kan välja

$$D(A) = \{u \in C^2[a,b] : Au \in L^2_w[a,b] \text{ och } b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0\}$$

där b_1 och b_2 är reella konstanter som uppfyller $(b_1, b_2) \neq (0,0)$.

(iii) Om $p(a) \neq 0$, $p(b) = 0$ väljer vi

$$D(A) = \{u \in C^2[a,b] : Au \in L^2_w[a,b] \text{ och } a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0\}$$

där a_1 och a_2 är reella konstanter som uppfyller $(a_1, a_2) \neq (0,0)$.

(iv) Om $p(a) \neq 0$, $p(b) \neq 0$ kombinerar vi (ii) och (iii). Det generella fallet blir

$$D(A) = \left\{u \in C^2[a,b] : Au \in L^2_w[a,b] \text{ och } \begin{matrix} a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0 \\ b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0 \end{matrix}\right\}$$

där $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ och $(b_1, b_2) \neq (0,0)$.

(v) Om $p(a) = p(b) \neq 0$, kan vi sätta

$$D(A) = \left\{u \in C^2[a,b] : Au \in L^2_w[a,b] \text{ och } \begin{matrix} u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b) \end{matrix}\right\}$$

Randvillkoren (i)–(iv) säges vara *separerade*, eftersom de ger separata krav i olika randpunkter. I fall (v) talar vi om ett Sturm-Liouvilleproblem med *periodiska randvillkor* (exempel: fourierserier). Listan är inte fullständig.

Sammanfattning. Det allmänna Sturm-Liouville-egenvärdesproblemet definierat på ett kompakt intervall $[a,b]$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[p(x)u'(x)] + q(x)u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0, & a \leq x \leq b \\ a_1 u'(a) + a_2 u(a) = 0 \\ b_1 u'(b) + b_2 u(b) = 0 \end{cases}$$

där a_1, a_2, b_1 och b_2 är reella konstanter som uppfyller $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ och $(b_1, b_2) \neq (0,0)$, kan skrivas som en egenvärdesekvation

$$Au = \lambda u, \qquad u \in D(A),$$

där operatorn A är symmetrisk, d v s

$$< Au, v > = < u, Av > \qquad \text{för alla } u, v \in D(A).$$

Enligt vår sats om symmetriska operatorer är alla egenvärden till Sturm-Liouvilleproblemet reella. Vidare är egenfunktioner som svarar mot olika egenvärden ortogonala.

Vi har snart visat att nästan alla egenskaper hos egenfunktionerna i det inledande exemplet även föreligger för egenfunktionerna till ett allmänt Sturm-Liouvilleproblem. En mycket viktig fråga återstår dock: När är egenfunktionerna sådana att de utgör ett fullständigt ortogonalsystem på $[a,b]$? Detta är, som vi tidigare såg, ett nödvändigt krav för att det skall vara möjligt att anpassa linjärkombinationer av egenfunktioner till exempelvis begynnelsevillkor.

Sturm-Liouvilles sats. *Det symmetriska Sturm-Liouville-egenvärdesproblemet med separerade randvillkor där funktionerna p, q och w uppfyller villkoren i sats 3.2 har oändligt många reella egenvärden som kan numreras i en växande följd*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lambda_n \to \infty \text{ då } n \to \infty.$$

Alla egenvärden är enkla och motsvarande egenfunktioner $\{\varphi_n(x, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ utgör ett ortogonalsystem i $L^2_w[a,b]$. Detta ortogonalsystem är fullständigt på intervallet $[a,b]$.

För beviset, se t ex Coddington–Levinson [4], kap 7.

Enligt Sturm-Liouvilles sats kan en godtycklig funktion $f \in L^2_w(a,b)$ på intervallet (a,b) utvecklas i ortogonalserie med hjälp av egenfunktionerna φ_n:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \qquad a < x < b, \tag{3.21}$$

där

$$c_n = \frac{< f, \varphi_n >}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b w(x) f(x) \overline{\varphi_n(x)}\, dx.$$

Egenfunktionssystemets fullständighet gör att N-te delsumman i (3.21) konvergerar mot $f(x)$ i $L^2_w[a,b]$-norm, d v s

$$\lim_{N \to \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 w(x)\, dx = 0.$$

Speciellt gäller i exemplet i avsnitt 3.1 att varje $f \in L^2[0,\pi]$ har en serieutveckling

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx, \qquad 0 < x < \pi,$$

där

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

och

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n \sin nx \right|^2 dx = 0.$$

Serien konvergerar mot f i $L^2_w[0,\pi]$-norm, med $w(x) \equiv 1$. Detta har vi tidigare sett på annat sätt i avsnitt 3.1.

Definition.

a) En differentialoperator av den typ, som förekommer i sats 3.2 och Sturm-Liouvilles sats brukar kallas en *reguljär Sturm-Liouvilleoperator*.

b) Med en *singulär Sturm-Liouvilleoperator* menar man en differentialoperator som definieras av

$$A = -\frac{1}{w}\left(\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q\right)$$

med $p \in C^1(I)$, $q, w \in C(I)$, $p \neq 0$ och $w > 0$ på I, där I är ett givet *icke-kompakt intervall.* (Mängden I kan vara ett öppet begränsat intervall, ett halvöppet begränsat intervall eller ett obegränsat intervall.) Exempelvis är de symmetriska operatorer som associeras med Legendre-, Tjebysjov-, Hermite- och Laguerre-ekvationerna av singulär typ.

Den metod för att lösa egenvärdesproblem som vi hittills använt kan dock användas även i det singulära fallet. Villkoret (γ) i sats 3.2 ersätts då med

$$\lim_{x \to a^+} p(x)W(u,\overline{v})(x) = \lim_{x \to b^-} p(x)W(u,\overline{v})(x).$$

Följande exempel visar detta.

Exempel. Legendres differentialekvation

$$(1 - x^2)u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0, \qquad -1 < x < 1,$$

kan skrivas på självadjungerad form

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right] - \lambda u(x) = 0, \qquad -1 < x < 1,$$

d v s $Au = \lambda u$ där

$$Au = \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right].$$

Eftersom $p(x) = 1 - x^2$ ger att $p(-1) = p(1) = 0$ så gäller att A är en symmetrisk operator, d v s

$$< Au, v > = < u, Av >$$

för alla $u, v \in D(A)$, där $D(A) = C^2[-1,1]$. Alternativt kan Legendres differentialekvation skrivas som ett egenvärdesproblem på följande sätt.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{du}{dx}\right] + \lambda u = 0, & -1 < x < 1, \\ u(\pm 1) \text{ begränsad.} \end{cases}$$

3.3 Fourierserier och Sturm-Liouvilleproblem

Vi skall visa hur man kan erhålla fourierserier från ett Sturm-Liouvilleproblem med periodiska randvillkor som i (v). Betrakta problemet

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, & -T/2 \leq x \leq T/2, \\ u(-T/2) = u(T/2) \\ u'(-T/2) = u'(T/2). \end{cases}$$

Vi har ett Sturm-Liouvilleproblem där randvillkoren ej är separerade. Detta innebär att vi inte direkt kan tillämpa Sturm-Liouvilles sats.

Definiera operatorn A och dess definitionsområde $D(A)$ genom

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad D(A) = \left\{ u \in C^2[-T/2, T/2]; \begin{array}{l} u(-T/2) = u(T/2) \\ u'(-T/2) = u'(T/2) \end{array} \right\}.$$

Detta svarar mot valen $q(x) = 0$, $p(x) = w(x)$ =konstant (denna konstant väljs senare). Problemet kan nu skrivas

$$Au = \lambda u, \qquad u \in D(A).$$

Om $\lambda \neq 0$, sätter vi $\lambda = \omega^2 > 0$ och får lösningen

$$u(x) = Be^{i\omega x} + Ce^{-i\omega x},$$

där B och C är konstanter. Kravet $u \in D(A)$ ger antingen $B = C = 0$ (trivialfall) eller $e^{i\omega T} = 1$, d v s $\omega T = 2\pi n$, n heltal. Nu blir egenvärdena, med $\Omega T = 2\pi$,

$$\lambda = \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 = (n\Omega)^2 > 0$$

med egenfunktioner

$$u(x) = B\cos n\Omega x + C\sin n\Omega x.$$

Om $\lambda = 0$ får vi $u(x) = B =$ konstant. Egenfunktionerna kan även skrivas på formen

$$\varphi_n(x) = \cos n\Omega x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\psi_n(x) = \sin n\Omega x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ett passande funktionsrum är $L^2_w[-T/2, T/2]$ med $w(x) = 1/T$ och inre produkten

$$< f, g > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

I detta funktionsrum blir operatorn A symmetrisk och alla egenvärden reella (enligt sats 3.1).

Egenfunktionerna φ_n och ψ_n är linjärt oberoende och svarar mot samma egenvärde. Man säger att egenvärdena $\lambda = (n\Omega)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ är dubbla (har *geometrisk multiplicet två*), medan egenvärdet $\lambda = 0$ är enkelt. Enligt sats 3.1 är

$$< \varphi_n, \psi_m > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(x)\overline{\psi_m(x)}\,dx = 0, \quad m \neq n,$$

eftersom φ_n och ψ_m är egenfunktioner svarande mot olika egenvärden. Vi ser dock även att

$$< \varphi_n, \psi_n > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos n\Omega x \sin n\Omega x\,dx = 0,$$

d v s även φ_n och ψ_n är ortogonala. Denna slutsats kan vi inte dra ur sats 3.1, eftersom φ_n och ψ_n svarar mot samma egenvärde.

Till varje $f \in D(A)$ finns en periodisk fortsättning med period $T > 0$ på hela $\mathbb{R}$. Nu gäller enligt sats 1.9 att f kan utvecklas i följden $\{\varphi_n, \psi_n\}$, d v s

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\Omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega x$$

med

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos n\Omega x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin n\Omega x\,dx.$$

Detta följer också av en Sturm-Liouvillesats som täcker fallet med periodiska randvillkor.

3.4 Det svängande membranet

Ett klassiskt problem utgör svängningarna hos ett plant, homogent, elastiskt, cirkulärt membran med fastspänd rand. Lägg ett xy-plan i membranets jämviktsläge så att dess rand γ blir enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Efter införande av polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

kan avvikelsen från jämviktsläget beskrivas av funktionen $u = u(r,\varphi,t)$. Man kan visa att denna funktion uppfyller den tvådimensionella vågekvationen, som i polära koordinater får följande utseende

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) = 0, \quad r < 1,\ t > 0. \tag{3.22}$$

Här gäller att $c = \sqrt{T/q}$, där T är membranspänningen och q är massan per ytenhet.

Eftersom membranet är fast inspänt vid $r = 1$ måste randvillkoret

$$u(1,\varphi,t) = 0 \tag{3.23}$$

vara uppfyllt. Om utbuktning och hastighet vid $t = 0$ är kända tillkommer begynnelsevillkoren

$$u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi), \quad r < 1 \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(r,\varphi,0) = g(r,\varphi), \quad r < 1 \tag{3.25}$$

För att finna lösningar till vågekvationen (3.22) ansätter vi $u(r,\varphi,t)$ som en produkt mellan en rumsberoende och en tidsberoende funktion, d v s

$$u(r,\varphi,t) = U(r,\varphi)T(t).$$

Insättning i (3.22) och omflyttning ger följande relation

$$\frac{1}{c^2T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{U}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right).$$

Här är vänster led oberoende av (r, φ) medan höger led är oberoende av t. Båda leden är alltså lika med en konstant som vi kallar $-\lambda$. Vi får då

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\lambda c^2 T \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -\lambda U. \tag{3.27}$$

Separera nu återigen variabler genom att sätta

$$U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Efter insättning i (3.27) och omflyttning får vi

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Båda sidor är en konstant som vi kallar μ. Vi får således

$$\Phi''(\varphi) = -\mu\Phi(\varphi) \tag{3.28}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r) = \mu R(r). \tag{3.29}$$

Funktionen $\Phi(\varphi)$ måste vara 2π-periodisk vilket leder till kravet $\mu = n^2 \geq 0$, där n är ett heltal. Lösningen till (3.28) kan nu skrivas

$$\Phi(\varphi) = A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi),$$

där A och B är konstanter.

Vi skriver ekvation (3.29) som ett Sturm-Liouvilleproblem. Det enda villkor vi har på $R(r)$ i $r = 0$ är att den är begränsad.

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(rR'(r)) + \left(-\frac{n^2}{r}\right) R(r) + \lambda r R(r) = 0 \\ |R(0)| < \infty \\ R(1) = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

Man kan visa att villkoret $R(1) = 0$ är orimligt om $\lambda \leq 0$. Antag därför i fortsättningen att $\lambda > 0$.

Variabelbytet $x = r\sqrt{\lambda}$, $X(x) = R(r)$ uti (3.29) ger

$$x^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + x\frac{dX(x)}{dx} + (x^2 - n^2)X(x) = 0. \tag{3.31}$$

Detta är den s k *Bessels differentialekvation*. Dess lösningar som är begränsade i en omgivning av origo är

$$X(x) = aJ_n(x),$$

där a är en konstant och $J_n(x)$ är *Besselfunktionen* av första slaget av ordning n. Lösningen till ekvation (3.29) är alltså

$$R(r) = aJ_n(r\sqrt{\lambda}).$$

Randvillkoret i $r = 1$ kräver nu emellertid att

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Man kan visa att J_n har oändligt många nollställen $j_{n,1}, j_{n,2}, \ldots$. Kvadraterna på dessa nollställen är alltså egenvärden till systemet (3.30) medan $J_n(j_{n,k}r)$, $k = 1, 2, \ldots$ är systemets egenfunktioner.

Vi löser tidsekvationen (3.26) och finner att möjliga lösningar till vår ursprungliga ekvation (3.22) är

$$u_{n,k}(r,\varphi,t) = J_n(j_{n,k}r)\big(A\cos(n\varphi) + B\sin(n\varphi)\big)\big(C\cos(cj_{n,k}t) + D\sin(cj_{n,k}t)\big)$$

för $k = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$. Även summor av dessa är lösningar till (3.22).

Nu återstår endast att anpassa de funna lösningarna till begynnelsevillkoren (3.24) och (3.25). Låt oss för enkelhetens skull anta att membranet är i vila vid $t = 0$, d v s $g(r,\varphi) = 0$. Detta medför att $D = 0$. Dessutom kan vi, för att förenkla räkningarna, anta att vi har rotationsinvarians då $t = 0$, d v s $f(r,\varphi) = f(r)$. φ–beroendet försvinner om endast funktioner $u_{n,k}$ för vilka $n = 0$ får finnas med i lösningen. Vi hoppas alltså kunna finna en lösning på formen

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(j_{0,k}r)\cos(cj_{0,k}t). \tag{3.32}$$

Problemet är att välja konstanterna c_k, $k = 1, 2, \ldots$ så att

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(j_{0,k}r) = f(r). \tag{3.33}$$

Det visar sig emellertid att Sturm-Liouvilles sats för singulära Sturm-Liouvilleproblem garanterar att funktionerna $J_0(j_{0,k}r)$, $k = 1, 2, \ldots$ utgör ett fullständigt, ortogonalt funktionssystem på intervallet $[0,1]$ med viktsfunktion $w(r) = r$. Ortogonalitetsrelationen kan skrivas

$$\frac{\int_0^1 J_0(j_{0,k}r)J_0(j_{0,m}r)r\,dr}{\int_0^1 \big(J_0(j_{0,k}r)\big)^2 r\,dr} = \delta_{km}. \tag{3.34}$$

Multiplicera relation (3.33) med $rJ_0(j_{0,m}r)$ och integrera från 0 till 1. Användning av (3.34) ger slutligen

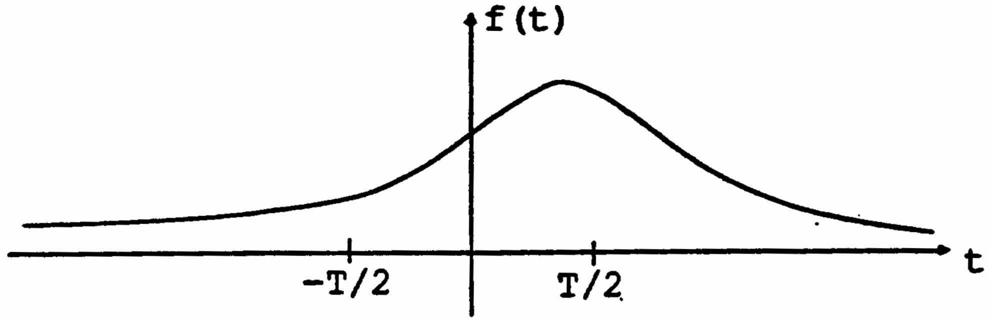
$$c_k = \frac{\int_0^1 f(r)J_0(j_{0,k})r\,dr}{\int_0^1 \big(J_0(j_{0,k}r)\big)^2 r\,dr}. \tag{3.35}$$

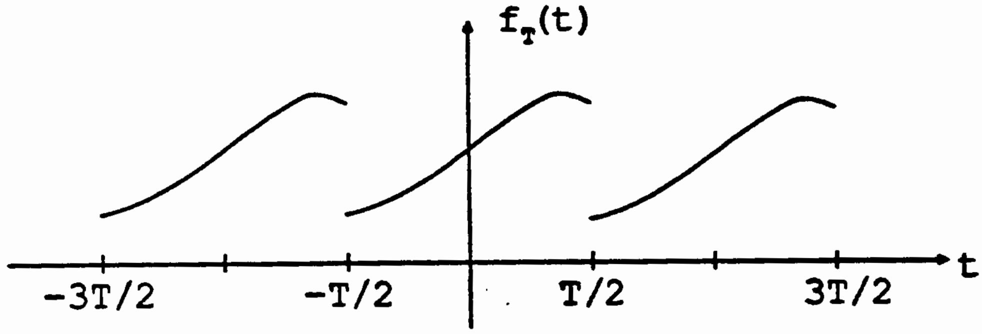
Ekvation (3.32) med c_k enligt (3.35) beskriver således membranets avvikelse från jämviktsläget.

4. FOURIERTRANSFORMEN

4.1 Definition av fouriertransformen

Vi vet från kapitel 1 att fourierserier går utmärkt att använda vid studiet av periodiska förlopp i t ex mekaniska och elektriska system. Tyvärr ger dock praktiska och teoretiska problem ofta upphov till ickeperiodiska funktioner. Allmänt har man en funktion $f(t)$, som är definierad på hela reella axeln och som inte har någon periodicitet. En naturlig fråga är nu om det finns någon metod att studera frekvensspektrum hos ickeperiodiska funktioner. En sådan ges av *fouriertransformen*. För att införa denna kan man gå till väga enligt följande: Tag först restriktionen av $f(t)$ till ett ändligt intervall och gör en periodisk fortsättning av denna restriktion.





Vi får då en T-periodisk funktion f_T med egenskapen att

$$f(t) = f_T(t), \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}.$$

Genom att låta $T \to \infty$ fås att

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t) \tag{4.1}$$

för alla t. Under sedvanliga förutsättningar kan f_T utvecklas i fourierserie

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t},$$

där

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\Omega t}\,dt, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T},$$

och det följer med $\omega_n = \Omega n = \dfrac{2\pi}{T} n$ från (4.1) att

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x}\, dx \right) e^{i\omega_n t}. \tag{4.2}$$

Vi skall nu beräkna detta gränsvärde intuitivt. Senare skall vi verifiera att den erhållna formeln är korrekt. Idén består i att uppfatta högerledet i (4.2) som en Riemannsumma. Sätt

$$h_t(\omega) = \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \right) e^{i\omega t}.$$

Definitionsmässigt är Riemannintegralen

$$\int_a^b h_t(\omega)\, d\omega = \lim_{\|\omega\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h_t(\omega_k) \Delta\omega_k,$$

där $a = \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_n = b$, $\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ och $\|\omega\| = \max\limits_{0\le k\le n-1} |\Delta\omega_k|$.

I vårt fall är

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi(k+1)}{T} - \frac{2\pi k}{T} = \frac{2\pi}{T},$$

eller

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega_k}{2\pi}.$$

Observera att $\Delta\omega_k \to 0$ då $T \to \infty$. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\omega_k \to 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x}\, dx \right) \Delta\omega_n \\ &= \left[\text{intuitivt i varje fall}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \right) d\omega. \end{aligned}$$

Jämfört med vanliga fourierserier ser vi att fourierkoefficienterna c_n, definierade för varje heltal n, $-\infty < n < \infty$, har bytts ut mot integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx,$$

definierade för alla reella ω, $-\infty < \omega < \infty$. Fourierserien

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\Omega n t}$$

har ersatts av

Fouriers inversionsformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \right) d\omega. \tag{4.3}$$

Definition. För varje *absolutintegrabel* funktion $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, d v s sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

definierar vi fouriertransformen $\widehat{f} = \mathfrak{F}[f]$ enligt

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Klassen av absolutintegrabla funktioner definierade på reella axeln brukar betecknas med $L^1(\mathbb{R})$ (åtminstone om integralen är definierad som en Lebesgueintegral). $\mathfrak{F}$ uppfattas som en operator, som avbildar funktionen f på dess fouriertransform

$$\mathfrak{F} : f \longmapsto \widehat{f} = \mathfrak{F}[f].$$

Andra vanliga beteckningar är

$$\widehat{f}(\omega) = \mathfrak{F}[f](\omega) = \mathfrak{F}[f(t)].$$

Sats 4.1. *Antag att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = A < \infty,$$

d v s f tillhör $L^1(\mathbb{R})$. Då gäller följande.

(i) $|\widehat{f}(\omega)| \leq A, \quad -\infty < \omega < \infty.$

(ii) $\widehat{f}(\omega)$ *är en kontinuerlig funktion av* ω.

(iii) $\lim_{|\omega|\to\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$ *(Riemann-Lebesgues lemma).*

Anmärkning. Villkoret $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ är *tillräckligt* men *inte nödvändigt* för att man skall kunna ge mening åt f:s fouriertransform. En önskan att kunna fouriertransformera vidare klasser av funktioner är en av orsakerna till att man inför ett nytt funktionsbegrepp, de s k *distributionerna* eller generaliserade funktionerna.

Exempel. Låt oss beräkna fouriertransformen av $f(t) = e^{-|t|}$. Vi får

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-|t|}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} e^{t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{e^{(-i\omega+1)t}}{-i\omega+1} \right]_{-T}^{0} + \lim_{T\to\infty} \left[\frac{e^{(-i\omega-1)t}}{-i\omega-1} \right]_{0}^{T} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Fouriers inversionsformel ger i detta fall

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{2}{1+\omega^2}\, d\omega. \tag{4.4}$$

Observera att vi inte har bevisat fouriers inversionsformel utan bara gjort den trolig.

Övning 7. Bevisa formel (4.4) med residukalkyl. (Denna övning är ett viktigt led i beviset av Fouriers inversionsformel.)

Exempel. Beräkna fouriertransformen av funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Lösning.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \frac{e^{-i\omega T} - e^{i\omega T}}{-i\omega} = \frac{2i \sin \omega T}{i\omega} = \frac{2 \sin \omega T}{\omega} \end{aligned}$$

Vi observerar att

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega}$$

ej är absolutintegrabel, d v s $\widehat{f}$ tillhör ej $L^1(\mathbb{R})$.

4.2 Räkneregler för fouriertransformen

Följande räkneregler för fouriertransformen är analoga med motsvarande räkneregler för fourierserier. Vi lämnar bevisen som övning.

1. *Linearitet* $\quad af + bg \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} a\widehat{f} + b\widehat{g}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$
2. *Tidsskalning* $\quad f(at) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$
3. *Tidsförskjutning* $\quad f(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} e^{-i\omega t_0} \widehat{f}(\omega), \quad t_0 \in \mathbb{R}.$
4. *Frekvensförskjutning eller modulering*

$$e^{iat} f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \widehat{f}(\omega - a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Multiplikation av signalen $f(t)$ med fasfaktorn e^{iat} ger en förskjutning av f:s frekvensspektrum.

Följande exempel, hämtat från ett Chalmerskompendium av Jan Petersson, belyser moduleringsregeln.

Exempel. Amplitudmodulering.

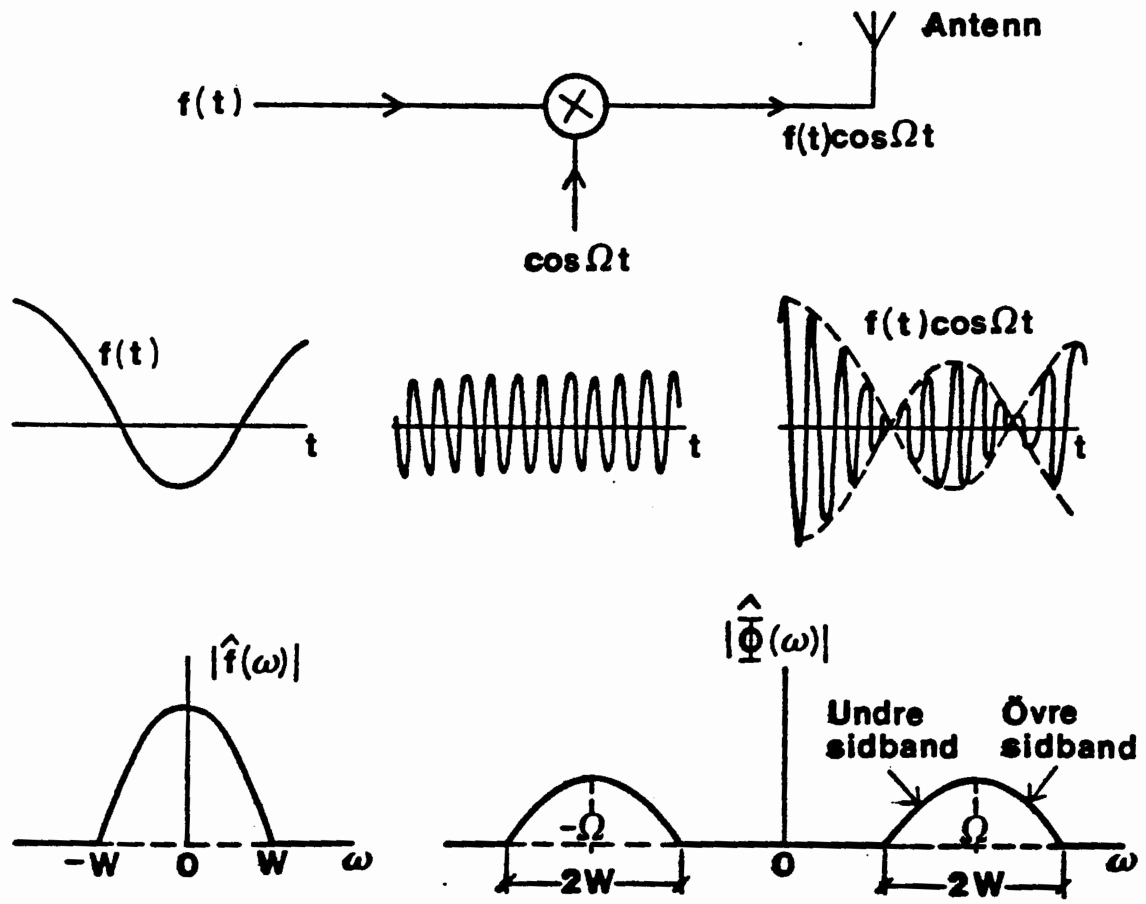
Vid amplitudmodulering inom t ex telefoni och radiokommunikation låter man amplituden hos en högfrekvent bärvåg variera i takt med den tonfrekventa signal som man vill överföra. Om denna signal är $f(t)$ och bärvågen är $\cos \Omega t$, så bildas*

$$\Phi(t) = f(t)\cos \Omega t.$$

Fouriertransformen för den amplitudmodulerade signalen $\Phi(t)$ är enligt moduleringsregeln

$$\widehat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{2}\widehat{f}(\omega - \Omega) + \frac{1}{2}\widehat{f}(\omega + \Omega).$$

Spektrum för den modulerade signalen $f(t)$ delas alltså i två lika delar, som sedan translateras med $\pm\Omega$ rad/sek. Figuren nedan visar amplitudspektra för $f(t)$ och $\Phi(t)$ i ett fall där $f(t)$ är "bandbegränsad", d v s $\widehat{f}(\omega) = 0$, då $|\omega| > W$. Observera att då $f(t)$ är reell är $|\widehat{f}(\omega)|$ en jämn funktion och alltså symmetrisk kring $\omega = 0$. I praktiska fall varierar $f(t)$ långsamt i förhållande till bärvågen. Typiska värden är $W/2\pi < 4.5$ kHz och $\Omega/2\pi > 150$ kHz.



* Denna typ av amplitudmodulering (det finns andra) betecknas DSB-SC (Double sideband-suppressed carrier).

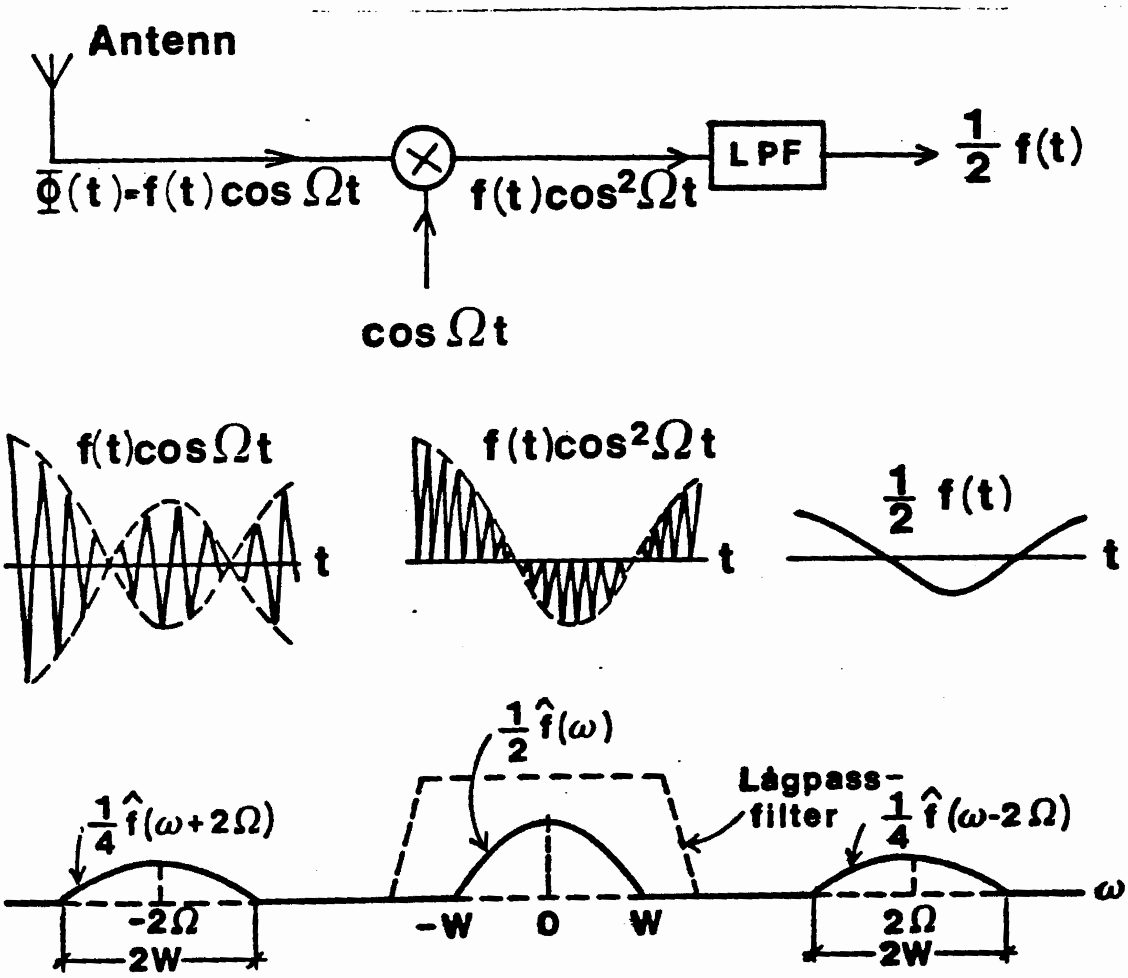
På mottagarsidan kan $f(t)$ återvinnas ur $\Phi(t)$ genom en process kallad *demodulering* eller *detektering*. Olika möjligheter finns. En metod är "synkron" detektering. Vi bildar produkten $\Phi(t)\cos\Omega t$ och får

$$\Phi(t)\cos\Omega t = f(t)\cos^2\Omega t = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(t)\cos 2\Omega t.$$

Fouriertransformering ger

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[\Phi(t)\cos\Omega t\right] &= \left[\cos\Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t}+e^{-i\Omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2}\widehat{f}(\omega) + \frac{1}{4}\widehat{f}(\omega-2\Omega) + \frac{1}{4}\widehat{f}(\omega+2\Omega).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Spektrum för $\Phi(t)\cos\Omega t$ består av tre delspektra och om $\Omega > W$ (ett krav, som i praktikfall lätt kan uppfyllas) så överlappar dessa delspektra inte varandra (se figur nedan). Andra och tredje delen av spektrum kan då avlägsnas genom (ideal) lågpassfiltrering. Av högerledet (4.5) återstår då $\frac{1}{2}\widehat{f}(\omega)$, som är fouriertransform av $\frac{1}{2}f(t)$. Sammanfattningsvis: Om $\Omega > W$, så kan $f(t)$ återvinnas ur $\Phi(t)$ genom multiplikation med $\cos\Omega t$ följd av lågpassfiltrering.



Många linjära differentialekvationer kan framgångsrikt studeras m h a fouriertransformering. Följande räkneregler gäller:

5. *Deriveringregeln.* Om f och dess derivator av ordning $\leq n$ tillhör $L^1(\mathbb{R})$, d v s

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f^{(k)}(t)\right| dt < \infty, \quad k = 0,1,2,\ldots,n,$$

gäller att

$$f^{(n)}(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longmapsto} (i\omega)^n \widehat{f}(\omega).$$

Anmärkning. Under dessa förutsättningar följer av Riemann-Lebesgues lemma att om $f^{(n)}$ ligger i $L^1(\mathbb{R})$ gäller

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \omega^n \widehat{f}(\omega) = 0.$$

Detta innebär att $\widehat{f}(\omega)$ måste gå snabbare mot noll än $1/|\omega|^n$, då $|\omega| \to \infty$, d v s

$$\widehat{f}(\omega) = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right).$$

Vi ser återigen att regularitet (deriverbarhet) hos f yttrar sig i att dess fouriertransform $\widehat{f}$ avklingar snabbt. För någon konstant C gäller vidare olikheten

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{C}{(1+|\omega|)^n}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

6. *Frekvensderiveringsregeln.* Om $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ för något heltal $k \geq 1$ och om $f \in L^1(\mathbb{R})$, gäller att $\widehat{f}$ är k gånger deriverbar och

$$t^k f(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longmapsto} i^k \frac{d^k}{d\omega^k} \widehat{f}(\omega).$$

Man inser att 5. och 6. bör gälla ty de fås genom formell derivation av formlerna

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widehat{f}(\omega)\, d\omega$$

respektive

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt.$$

Problemen är följande:
(i) När gäller Fouriers inversionsformel?
(ii) Kan man derivera under integraltecknet?
(iii) Entydigheten: om $\widehat{f} = \widehat{g}$, är då säkert $f = g$?
Vi skall undvika dessa problem genom att i kapitel 5 visa att formlerna gäller mer allmänt för generaliserade funktioner.

4.3 Fouriers inversionssats

Sats 4.2. *Låt f vara en Riemannintegrabel funktion definierad på hela reella axeln sådan att*

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty, \quad (f \in L^1(\mathbb{R})).$

Låt $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ *vara dess fouriertransform och antag också att**

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|\,d\omega < \infty \quad (\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})).$

(iii) $f(t)$ *är kontinuerlig och begränsad för* $-\infty < t < \infty$.

Då gäller

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Bevis. Bilda integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{f}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)d\omega.$$

En formell omkastning av integrationsordningen ger uttrycket

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}\,d\omega\right)dx.$$

Här stöter vi på problem. Hur skall uttrycket $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u}\,d\omega$ tolkas ($u = t-x$)? Integralen är defintitivt inte konvergent i vanlig mening. Detta avhjälpes på följande sätt: Vi inför funktionen

$$\widehat{k}_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^2},$$

som konvergensfaktor. Enligt exemplet på sidan 65 gäller att

$$k(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \frac{1}{1+\omega^2} = \widehat{k}(\omega).$$

Tidsskalningsregeln 2. ger

$$k_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2\varepsilon}e^{-|t|/\varepsilon} \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^2} = \widehat{k}_\varepsilon. \tag{4.6}$$

---

* Antagandet (iii) är i själva verket överflödigt.

Nu gäller enligt exemplet på sidan 65 och övning 1 att

$$k(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\frac{d\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{k}(\omega)\,d\omega$$

och därmed via skalning också att

$$k_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{k}_\varepsilon(\omega)\,d\omega. \tag{4.7}$$

Vi får nu efter införandet av konvergensfaktorn att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{f}(\omega)\frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^2}\,d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{f}(\omega)\widehat{k}_\varepsilon(\omega)\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}f(x)\,dx\right)\widehat{k}_\varepsilon(\omega)\,d\omega \\
&= [\text{omkastning av integrationsordning}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-x)\omega}\widehat{k}_\varepsilon(\omega)\,d\omega\right)dx \\
&= [\text{formel (4.6)}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)k_\varepsilon(t-x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon}e^{-|t-x|/\varepsilon}f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon}e^{-|x|/\varepsilon}f(t+x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(x)f(t+x)\,dx
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Funktionen $k_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}e^{-|t|/\varepsilon}$ har för små $\varepsilon > 0$ egenskaper liknande dem, som Poissonkärnan $P_r(\theta)$ har då r är nära 1. Det gäller att

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon}e^{-|t|/\varepsilon}\,dt = 1, \quad \varepsilon > 0.$

(ii) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|\geq\delta} \frac{1}{2\varepsilon}e^{-|t|/\varepsilon}\,dt = 0, \quad \delta > 0.$

Man säger att $k_\varepsilon(t)$ är en approximativ deltafunktion (deltadistribution, se kap 5). Tag $h > 0$ och välj $\delta > 0$ så att $|f(t+x) - f(t)| < h$ för $|x| < \delta$. Vi får

$$\begin{aligned}
\left| f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(x) f(t+x)\,dx \right| &\le \int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(x)\,|f(t) - f(t+x)|\,dx \\
&\le \max_{|x|\le\delta} |f(t) - f(t+x)| + 2 \max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \int_{|x|\ge\delta} k_\varepsilon(x)\,dx \\
&\le h + 2MR(\varepsilon) \to h \text{ då } \varepsilon \to 0,
\end{aligned}$$

där $M = \max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|$, ty

$$R(\varepsilon) = \int_{|x|\ge\delta} k_\varepsilon(x)\,dx \to 0 \quad \text{då } \varepsilon \to 0.$$

Men $h > 0$ är godtyckligt. Detta innebär att höger led i (4.8) går mot $f(t)$ då $\varepsilon \to 0$. Med ett analogt, något enklare, resonemang (genomför detta) inser man att vänster led i (4.8) går mot

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(w)\,dw$$

och vi har visat Fouriers inversionsformel. ∎

Fouriers inversionsformel kan tolkas analogt med fourierserieutvecklingen för en periodisk funktion. Om funktionen $f(t)$ har period T med $\Omega T = 2\pi$, talar fourierkoefficienterna

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\Omega t}\,dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

om hur mycket av den rena svängningen $h(t) = e^{in\Omega t}$ som ingår i f. Mängden $\sigma = \{n\Omega; c_n \ne 0\}$ kallas *spektrum* för funktionen f. Fourierserieutvecklingen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = \sum_{n\in\sigma} c_n e^{in\Omega t}$$

uttrycker det faktum att den periodiska funktionen f verkligen kan byggas upp av sina komponenter $c_n e^{in\Omega t}$.

För en aperiodisk funktion $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, talar fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

om hur mycket av svängningen $h(t) = e^{i\omega t}$ som ingår i f. Med *spektrum* för funktionen f menar man den minsta slutna mängd Σ på realaxeln sådan att $\hat{f}(\omega) = 0$ om $\omega \notin \Sigma$. Mängden Σ kallas *stödet* för $\hat{f}$ (jfr avsnitt 5.4). Fouriers inversionsformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\,d\omega$$

säger att den aperiodiska funktionen f kan byggas upp av oändligt många periodiska funktioner $h(t) = e^{i\omega t}$, $\omega \in \Sigma$. Funktionen $\widehat{f}/(2\pi)$ kallas *spektraltätheten* för funktionen f.

Anmärkning. Steget $f \mapsto \widehat{f}$ kallas *spektralanalys* (analys, fourieranalys). Rekonstruktionen av f, d v s steget $\widehat{f} \mapsto f$, kallas *spektralsyntes*.

4.4 Faltning

Definition. För två givna funktioner f och g bildar vi en ny funktion $(f * g)(t)$ definierad för $-\infty < t < \infty$ genom

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx. \tag{4.9}$$

$f * g$ kallas *faltningen* av f och g.

Exempel. Låt funktionerna f och g vara definierade av

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Bestäm faltningen av f och g.

Lösning.

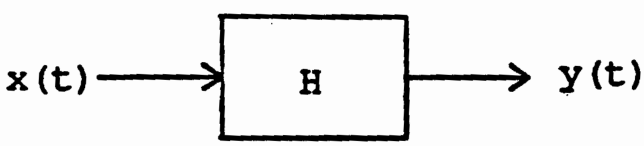
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx = \left[f(t-x) = \begin{cases} 1, & x \leq t, \\ 0, & x > t, \end{cases} \right]$$

$$= \begin{cases} \int_0^t e^{-x}\,dx = 1 - e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Anmärkning. Ordet faltning kommer från tyskans *Faltung*, som betyder vikning. Engelskans *convolution* har latinskt ursprung.

Faltningar uppträder naturligt vid studiet av linjära, tidsinvarianta system. Ett system H kan tänkas beskrivas av en "svart låda", till vilken man skickar en insignal $x(t)$ och får en utsignal $y(t)$. Vi skriver detta formellt

$$x(t) \overset{H}{\longmapsto} y(t).$$



Matematiskt beskrivs systemet av en operator som avbildar funktioner på funktioner.

Ett system är *linjärt* om

$$x_1(t) \xmapsto{H} y_1(t)$$
$$x_2(t) \xmapsto{H} y_2(t)$$

medför att

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) \xmapsto{H} \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t).$$

Detta innebär att utsignalen svarande mot en given linjärkombination av insignalerna x_1 och x_2 är precis samma linjärkombination av utsignalerna y_1 och y_2.

Systemet är *tidsinvariant* om för varje T gäller att

$$x(t) \xmapsto{H} y(t)$$

medför

$$x(t-T) \xmapsto{H} y(t-T).$$

För ett tidsinvariant system resulterar en tidsfördröjning med tiden T av insignalen i en tidsfördröjning av utsignalen med tiden T.

Man kan visa (se appendix H) att utsignalen $y(t)$ vid insignal $x(t)$ för ett linjärt, tidsinvariant system under allmänna förutsättningar ges av integralen

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)h(s)\,ds.$$

Funktionen h kallas systemets *impulssvar*. Ofta måste man tolka h som en s k distribution (generaliserad funktion), se kapitel 5.

Om $h(t) = 0$ då $t < 0$ beror utsignalen vid tiden t, $y(t)$, endast på insignalen $x(s)$ för tider $s \leq t$. Systemet kallas då *kausalt* (beror endast på det förflutna). Detta är ett naturligt antagande för fysikaliska system.

Faltningen av de lokalt integrerbara funktionerna f och g är inte alltid definierad. Den är dock definierad bl a under följande förutsättningar:

(i) f och g tillhör $L^1(\mathbb{R})$. Då gäller också att $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) $f \in L^1(\mathbb{R})$ och g är begränsad. Då blir $f * g$ en begränsad funktion.

(iii) f är begränsad och $g \in L^1(\mathbb{R})$. Då blir $f * g$ en begränsad funktion.

(iv) $f(t) = 0$ då $t < 0$ och $g(t) = 0$ då $t < 0$.

Övning 8. Bevisa påståendena (i)–(iv).

Räknelagar för faltning.

Följande räknelagar gäller under vissa förutsättningar (se nedan):

1. *Kommutativa lagen* $\quad f * g = g * f$
2. *Distributiva lagen* $\quad f * (g + h) = f * g + f * h$
3. *Associativa lagen* $\quad f * (g * h) = (f * g) * h$
4. *Deriveringsregeln* $\quad \frac{d}{dt}(f * g)(t) = (f' * g)(t) = (f * g')(t)$

Något om bevisen. För 1. får vi via variabelbyte

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = t-x \\ du = -dx \end{bmatrix} \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(t-u)(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)f(u)\,du \\ &= (g*f)(t).\end{aligned}$$

Regel 1 gäller således om faltningen är definierad. Regel 2 gäller också om de ingående termerna är definierade och verifieras lätt. Reglerna 3 och 4 kräver mer ingående diskussion. Regel 3 gäller t ex om

(i) f, g och h ligger i $L^1(\mathbb{R})$.
(ii) f och g ligger i $L^1(\mathbb{R})$ och h är begränsad.
(iii) f, g och h är alla positiva.

Regel 4 slutligen gäller t ex om f, g, f' och $g' \in L^1(\mathbb{R})$.

Exempel. Om

$$\begin{cases} f(t) = H(t) \\ g(t) = H(t) - 2H(t-1) + H(t-2) \\ h(t) = 1 \end{cases}$$

fås att $f*(g*h) = 0$ medan $(f*g)*h = 1$.

Övning 9. Verifiera detta!

4.5 Fouriertransform och faltning

En mycket viktig egenskap hos fouriertransformen är dess inverkan på faltningar.

Sats 4.3 (Faltningssatsen). *Antag att f och g ligger i $L^1(\mathbb{R})$. Då gäller att*

(i) *$f*g$ ligger i $L^1(\mathbb{R})$.*
(ii) $f*g \overset{\mathfrak{F}}{\longmapsto} \widehat{f}\cdot\widehat{g}$.

Bevis. (i) följer av att $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ där $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$. Detta lämnas som övning (se anmärkningen nedan). För (ii) får vi

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[(f*g)(t)\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx\right)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= [\text{omkastning av integrationsordning}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)e^{-i\omega t}\,dt\right)g(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)e^{-i\omega(t-x)}\,dt\right)g(x)e^{-i\omega x}\,dx.\end{aligned}$$

För den inre integralen fås via variabelbytet $u = t - x$, $du = dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)e^{-i\omega(t-x)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du = \widehat{f}(\omega).$$

Vi ser att

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left[(f*g)(t)\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\left(g(x)e^{-i\omega x}\right)dx \\ &= \widehat{f}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}\,dx = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$ ∎

Andra varianter av faltningssatsen förekommer, t ex

Sats 4.4 (Faltningssatsen). *Om f, g och $\widehat{g}$ tillhör $L^1(\mathbb{R})$ gäller*

(i) *$f \cdot g$ tillhör $L^1(\mathbb{R})$,*

(ii) $f \cdot g \overset{\mathfrak{F}}{\longmapsto} \dfrac{1}{2\pi}(\widehat{f} * \widehat{g})$.

Bevis.

(i) Om g och $\widehat{g}$ tillhör $L^1(\mathbb{R})$ gäller enligt inversionssatsen att g är begränsad, d v s g tillhör $L^\infty(\mathbb{R})$. Detta innebär att $f \cdot g$ tillhör $L^1(\mathbb{R})$.

(ii) Vi får

$$\begin{aligned}(\widehat{f} * \widehat{g})(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega - x)\widehat{g}(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-x)t}\,dt\right)dx \\ &= [\text{byte av integrationsordningen}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)e^{ixt}\,dx\right)dt.\end{aligned}$$

Men $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)e^{ixt}\,dx = 2\pi g(t)$ enligt inversionssatsen. Således är

$$(\widehat{f} * \widehat{g})(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t}\,dt = 2\pi\mathfrak{F}\left[f(t)g(t)\right].$$ ∎

Anmärkning. I hela detta avsnitt har vi använt omkastning av integrationsordningar. En allmän sats, som garanterar att detta är tillåtet är Fubinis sats, som gäller för Lebesgueintegraler och därmed också för funktioner som är absolutintegrabla i Riemanns mening.

Sats (Fubini). *Antag att $f(x,y)$ är en mätbar* funktion av två reella variabler och antag att den upprepade integralen är ändlig:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dy\right)dx<\infty.$$

Då är $f(x,y)$ integrerbar över hela planet och

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\right)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Om den itererade integralen är absolutkonvergent kan man således kasta om integrationsordningen. Detta villkor är uppfyllt i de fall som vi behandlat ovan.

4.6 Plancherels formler

Formlerna bär namn efter den schweiziske matematikern Michel Plancherel (1885-1967). De är analoga med Parsevals formler för fourierserier.

Sats 4.5. *Om*
(i) *f och g samt $\widehat{g}$ tillhör $L^1(\mathbb{R})$*
eller om
(ii) *f och g tillhör $L^2(\mathbb{R})$*
så gäller

$$\text{(P1)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\,d\omega.$$

$$\text{(P2)}\qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{g}(\omega)|^2\,d\omega.$$

Formel (P2) *följer av* (P1), *om vi väljer $f=g$.*

Formlerna är i själva verket giltiga under många olika förutsättningar. I beviset skall vi anta att $f\in L^1(\mathbb{R})$ samt att g, $\widehat{g}\in L^1(\mathbb{R})$.

Bevis av P1 (då $f\in L^1(\mathbb{R})$, $g,\widehat{g}\in L^1(\mathbb{R})$).
Enligt Fouriers inversionsformel gäller att

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\omega)e^{i\omega t}\,dt.$$

* Mätbarhet är ett begrepp i integrationsteorin. Så är t ex kontinuerliga funktioner och gränsvärden av följder av kontinuerliga funktioner mätbara.

Komplexkonjugering ger

$$\overline{g(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\omega)} e^{-i\omega t}\, dt.$$

Vi får nu

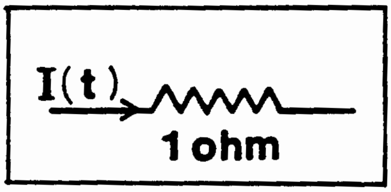
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\omega)} e^{-i\omega t}\, d\omega\right) dt \\ &= [\text{omkastning av integrationsordningen}] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(\omega)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt\right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega.\end{aligned}$$

Omkastningen av integrationsordningen är tillåten då f och $\widehat{g}$ är absolutintegrabla. ∎

4.7 Fysikaliska tolkningar av Plancherels formler

(Från Jan Petersson [9])

Energispektrum. Integralerna i (P1) och (P2) kallas ibland *energiintegraler*. Betrakta figuren, där en elektrisk ström med strömstyrkan $I(t)$ går genom en resistor med resistansen 1 ohm.



$I(t)$ mäts i ampere och t är tiden i sekunder. Då är $1 \cdot I^2(t)$ den *effekt* i watt, som utvecklas i resistorn och tidsintegralen

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} I^2(t)\, dt$$

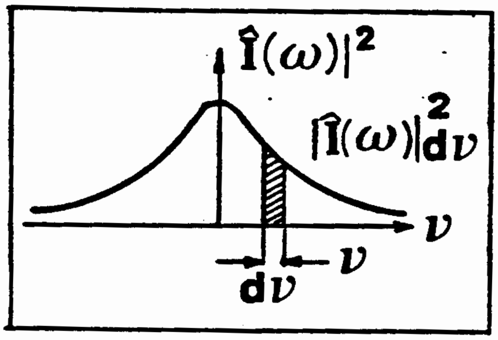
är den *energi* i Ws, som totalt utvecklas i resistorn. Genom Plancherels formel (P2) kan vi skriva

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} I^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{I}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Integralen i vänsterledet visar hur totalenergin E fördelas i tiden: $I(t)^2\, dt$ är den del av energin, som utvecklas under tidsintervallet t till $t + dt$. Integralen i högerledet visar hur totalenergin är fördelad på olika frekvenser i strömstyrkans spektrum.

$$|\widehat{I}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = |\widehat{I}(\omega)|^2\, d\nu$$

är den del av energin, som finns i frekvensbandet mellan ω och $\omega + d\omega$. Av detta skäl kallas $|\widehat{I}(\omega)|^2$ för *energispektrum*.



Exempel. En rektangulär puls

$$p(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

har enligt exemplet på sidan 66 fouriertransformen

$$\widehat{p}(\omega) = \frac{2\sin\omega T}{\omega}.$$

Pulsens energispektrum är då

$$|\widehat{p}(\omega)|^2 = \frac{4\sin^2\omega T}{\omega^2}.$$

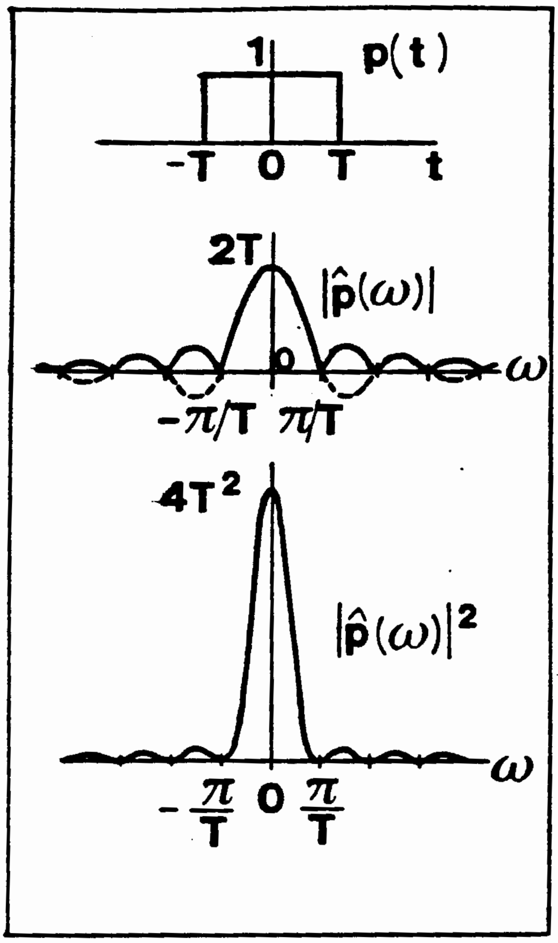
Enligt Plancherel är pulsens totalenergi

$$E = \int_{-T}^{T} 1^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2\omega T}{\omega^2}\, d\omega.$$

Tidsintegralen visar att $E = 2T$.

Genom integration av energispektrum kan vi beräkna exakt hur stor del av totalenergin som kommer från olika frekvensband. Energin från "huvudloben", $|\omega| < \pi/T$ (se figuren) är exempelvis

$$E_h = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{4\sin^2\omega T}{\omega^2}\, d\omega.$$



Genom enkla manipulationer får vi

$$E_h = \frac{4T}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = [\text{partiell integration}]$$

$$= \frac{4T}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{u}\,du = \frac{4T}{\pi}\mathrm{Si}(2\pi),$$

där Si är integralsinus:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Vi vet att $E = 2T$ och alltså är

$$\frac{E_h}{E} = \frac{2}{\pi}\mathrm{Si}(2\pi) \approx 0.904.$$

Tydligen gäller att drygt 90% av pulsens totalenergi finns i frekvensbandet $|\omega| < \pi/T$.