5. DISTRIBUTIONER

5.1 Introduktion

I flera fall är det vanliga funktionsbegreppet otillräckligt för viktiga matematiska modeller i fysik och teknik. Det är t ex naturligt att i mekanik och elektromagnetisk fältteori tala om punktmassor respektive punktladdningar.

En partikel med massan m placerad i punkten $x = a$ på reella axeln borde beskrivas av en icke–negativ täthetsfunktion $f(x)$ med egenskaperna

$$\text{(i)} \quad \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx = m \quad \text{för varje } \varepsilon > 0.$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{|x-a|>\varepsilon} f(x)\,dx = 0 \quad \text{för varje } \varepsilon > 0.$$

Med Lebesgues integrationsteori visar man lätt att en integrerbar funktion $f(x) \geq 0$ med egenskapen (ii) måste vara lika med 0 på hela reella axeln utom på en mängd av Lebesguemått 0. (För definition av Lebesguemått 0, se avsnitt 1.5.) Därmed är $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$, vilket motsäger (i). En sådan täthet $f(x)$ kan därför inte existera, och således krävs nya begrepp.

Massfördelningar behandlas i mått- och integrationsteori, där man betraktar *mängdfunktioner (mått)* definierade för vissa delmängder av $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$). En punktmassa μ med massan m i punkten $a \in \mathbb{R}$ bör således ha egenskapen

$$\mu(E) = \begin{cases} m, & a \in E \\ 0, & a \notin E. \end{cases}$$

En enhetsmassa (totalmassa 1) placerad i a brukar betecknas med δ_a. Vissa massfördelningar μ ges av en täthetsfunktion $f(x)$ genom

$$\mu(E) = \int_E f(x)\,dx,$$

där E genomlöper en klass av delmängder av reella axeln.

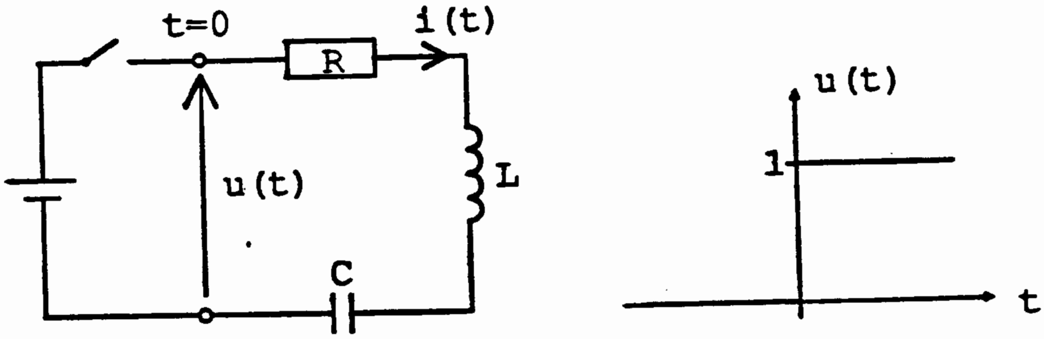
Måtteorin är det naturliga hjälpmedlet t ex i sannolikhetsteorin, där den ger en möjlighet att samtidigt behandla kontinuerliga och diskreta sannolikhetsfördelningar.

Emellertid är inte begreppet punktmassa tillräckligt för att behandla fysikaliska fenomen. I elektromagnetisk teori är *dipolen* ett viktigt begrepp. En dipol på reella linjen placerad i $x = 0$ är "gränsvärdet då $\varepsilon \to +0$" av två punktladdningar med laddning $1/\varepsilon$ respektive $-1/\varepsilon$ placerade i $x = 0$ respektive $x = \varepsilon$. Med beteckningen δ_a kan man formellt skriva

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\delta_0 - \delta_\varepsilon}{\varepsilon}.$$

En dipol är således formellt en derivata av en punktmassa!

Exempel. Betrakta kretsen



där strömbrytaren slås till vid tiden $t = 0$. Strömmen $i(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = u'(t).$$

Hur bör denna ekvation, särskilt $u'(t)$, tolkas då $t = 0$?

En möjlighet är att approximera spänningsförloppet med följden $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$\varphi_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-nx^2}\,dx.$$

φ_n är fördelningsfunktionen för en normalfördelning med standardavvikelse $1/\sqrt{2n}$. Det gäller att

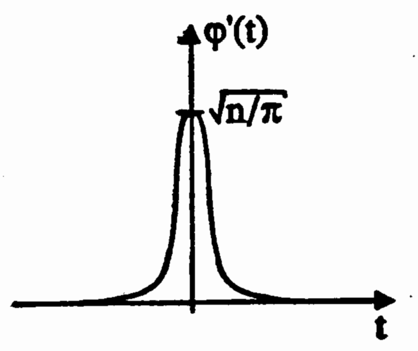
$$\lim_{t\to\infty} \varphi_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\,dx = 1$$

för alla n.

Variabelbytet $u = \sqrt{n}\,x$, $du = \sqrt{n}\,dx$, ger

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{n}t} e^{-u^2}\,du \to \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Vidare är $\varphi_n'(t) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-nt^2}$.



Man ser att för varje $\varepsilon > 0$ gäller

(i) $$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n'(t) = \varphi_n(\varepsilon) - \varphi_n(-\varepsilon) \to 1 \quad \text{då } n \to \infty,$$

(ii) $$\int_{|t|\geq\varepsilon} \varphi_n'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi_n'(t)\,dt + \int_{\varepsilon}^{1} \varphi_n'(t)\,dt$$
$$= \varphi_n(-\varepsilon) + 1 - \varphi_n(\varepsilon) \to 0, \quad \text{då } n \to \infty,$$

ty $\varphi_n(-\varepsilon) \to 0$ och $\varphi_n(\varepsilon) \to 1$ då $n \to \infty$.

Detta innebär att följden $\{\varphi_n'\}_{n=1}^{\infty}$ approximativt uppfyller villkoren (i) och (ii) för en punktmassa. Vi skall visa att man kan införa ett derivatabegrepp, sådant att derivatan $u'(t)$ av

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

kan tolkas som en enhetsmassa δ_0 i $t = 0$.

En annan viktig inskränkning i det klassiska funktionsbegreppets användbarhet uppstår i samband med fouriertransformer. Hittills har vi endast kunnat fouriertransformera funktioner $f(t)$ som är absolutintegrabla, d v s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Vi skall se att även denna situation förbättras genom distributionsteorin.

Exempel. Betrakta differentialekvationen

$$y'' + \Omega^2 y = 0. \tag{5.1}$$

Fouriertransformering ger

$$(i\omega)^2\widehat{y} + \Omega^2\widehat{y} = 0,$$

eller

$$\left(\Omega^2 - \omega^2\right)\widehat{y} = 0.$$

Om $\widehat{y}(\omega)$ är en vanlig funktion följer att $\widehat{y}(\omega) = 0$ då $\omega \neq \pm\Omega$. Fourierinversion ger att $y(t) = 0$.

Vi skall emellertid se att fouriertransformen av lösningarna

$$y(t) = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}$$

till (5.1) bör tolkas som *punktmassor* i $\pm\Omega$.

Den moderna rigorösa teorin för distributioner infördes av Laurent Schwartz på 1940–talet. Långt dessförinnan hade emellertid fysiker, bl a P Dirac, räknat formellt med liknande begrepp, därav namnet Diracs deltafunktion δ för en punktmassa.

Införandet av distributionerna ger en komplettering av funktionsbegreppet på samma sätt som rationella tal kompletterar hela tal så att division kan utföras, och komplexa tal kompletterar reella tal så att alla algebraiska ekvationer kan lösas.

5.2 Definition av distributioner

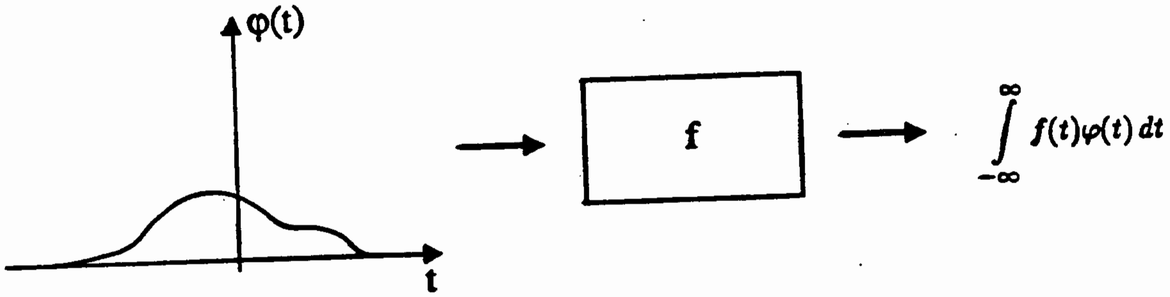
Antag att vi experimentellt vill studera ett fysikaliskt fenomen som beskrivs av en tidsberoende funktion $f(t)$. Klassiskt försöker man då bestämma f:s värde vid olika tidpunkter. I realiteten är det kanske troligare med en situation enligt följande.

Låt ett visst experiment beskrivas av funktionen $\varphi(t)$ och låt oss anta att det man mäter är ett viktat medelvärde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt.$$

Låt oss sedan utföra experimentet med en mängd funktioner $\varphi(t)$. Dessa brukar kallas *testfunktioner.*

Funktionen $f(t)$ kan uppfattas som en svart låda till vilken man skickar en insignal, testfunktionen $\varphi(t)$.



Utsignalen blir ett komplext tal $\int f(t)\varphi(t)\,dt$. Emellertid kan man också tänka sig "svarta lådor", f, från vilka man får utsignaler som

$$\varphi(0)$$
$$\varphi(0) + \frac{1}{2}\varphi'(0)$$
$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + \varphi(1).$$

Den väsentliga poängen är att man inte längre uppfattar f som en punktvis definierad funktion, som tilldelar t ett tal $f(t)$

$$t \longmapsto f(t),$$

utan som en *funktional*

$$\varphi \stackrel{f}{\longmapsto} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt,$$

som tilldelar en testfunktion φ ett talvärde $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt$.

En punktmassa i $x = a$, Diracs deltafunktion i $x = a$, är med denna terminologi den funktional δ_a, som till testfunktionen φ ordnar φ:s värde i a, $\varphi(a)$

$$\varphi \xmapsto{\delta_a} \varphi(a).$$

För värdet av funktionalen f på en testfunktion φ inför man beteckningarna

$$f[\varphi] = < f, \varphi > .$$

Om f är en vanlig funktion skriver man

$$f[\varphi] = < f, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Emellertid använder man sig av historiska och praktiska skäl funktionsbeteckningar även då f ej är en vanlig funktion. Man skriver t ex för en punktmassa i $x = a$

$$\delta_a[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,dx = \varphi(a).$$

Symbolen $\delta(x - a)$ skall här ej uppfattas som en vanlig funktion utan som en funktional. $\delta(x - a)$ har således inte några punktvisa värden, utan är endast definierad genom en integral mot en testfunktion.

Den erhållna distributionsteorin beror i hög grad på den klass av testfunktioner, som man valt. Inom fourieranalys är följande val av testfunktioner det vanliga:

Definition. En funktion $\varphi(t)$ definierad för $-\infty < t < \infty$ säges tillhöra *Schwartzklassen* $\mathcal{S}$ om

(i) φ är oändligt många gånger deriverbar,

(ii) varje derivata $\varphi^{(k)}(t)$, $k \geq 0$, uppfyller en olikhet

$$\left|\varphi^{(k)}(t)\right| \leq c_{k,m}\frac{1}{(1+|t|)^m} \tag{5.2}$$

för *varje* heltal $m \geq 0$, där $c_{k,m}$ får bero på k och m.

En derivata $\varphi^{(k)}(t)$ avtar således snabbare än varje negativ potens då $|t| \to \infty$. Ett typiskt exempel på testfunktioner i Schwartzklassen $\mathcal{S}$ är $\varphi(t) = p(t)e^{-t^2}$, där $p(t)$ är ett polynom.

Definition. En följd $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathcal{S}$ säges vara en *nollföljd* (*konvergent mot* 0) i $\mathcal{S}$ om

$$\lim_{n\to\infty} \max_{-\infty<t<\infty} \left|\varphi_n^{(k)}(t)\right| (1+|t|)^m = 0, \tag{5.3}$$

för alla heltal k och $m \geq 0$.

Definition. Följden $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\mathcal{S}$ säges konvergera mot φ i $\mathcal{S}$ om $\{\varphi_n - \varphi\}_{n=1}^{\infty}$ är en nollföljd i $\mathcal{S}$.

Definition. En *linjär funktional* f på $\mathcal{S}$ är en regel som till varje testfunktion φ ordnar ett komplext tal $f[\varphi] = < f, \varphi >$ sådant att

$$< f, \alpha\varphi + \beta\psi > = \alpha < f, \varphi > + \beta < f, \psi >, \tag{5.4}$$

för alla testfunktioner φ och ψ och alla komplexa tal α och β.

Definition. En *funktional* f på $\mathcal{S}$ säges vara kontinuerlig om

$$\varphi_n \to \varphi \text{ i } \mathcal{S}$$

medför att

$$< f, \varphi_n > \to < f, \varphi > \tag{5.5}$$

då $n \to \infty$.

Anmärkning. Om f är en *linjär* funktional på $\mathcal{S}$ är ovanstående definition ekvivalent med: $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en nollföljd medför att $< f, \psi_n > \to 0$ då $n \to \infty$.

Definition. En *tempererad distribution* (*generaliserad funktion*) är en kontinuerlig linjär funktional på $\mathcal{S}$. Klassen av tempererade distributioner betecknas med $\mathcal{S}'$.

Med funktionsbeteckningar skriver vi således en tempererad distribution som en avbildning

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \varphi &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt, \end{aligned}$$

som uppfyller *linearitetsvillkoret*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t))\,dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(t)\,dt \tag{5.4'}$$

och *kontinuitetsvillkoret*: om

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{i } \mathcal{S}$$

så måste

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt. \tag{5.5'}$$

Genom att införa nya klasser av testfunktioner får man andra klasser av distributioner. En ofta använd klass av distributioner får man om man *bara* utnyttjar testfunktioner med kompakt stöd. Den distributionsklassen är så stor att den samtidigt rymmer *både* hela klassen $\mathcal{S}'$ *och alla* kontinuerliga funktioner, som t ex e^x, e^{-x}, $\exp(x^2)$ och $\exp(\exp x)$. Speciellt rymmer den alla s k homogena lösningar till linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Varje försök att fouriertransformera dessa allmänna distributioner leder emellertid till stora problem. (Den nyfikne läsaren hänvisas till Gelfand och Shilov, *Generalized functions*, vol 1, [7], där bl a den säregna distributionen $\delta(x-i)$ definieras.) Här behandlar vi endast klassen $\mathcal{S}'$ (klassen av tempererade distributioner) och vi kommer att något oegentligt att använda ordet distribution synonymt med uttrycket tempererad distribution.

Exempel. Avgör om någon eller några av följande funktioner är testfunktioner i $\mathcal{S}$.

a) $e^{-|t|}$ b) $\sin t$ c) $e^{-t^2}\cos t$

d) $\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$

Lösning.

a) Nej, ty $e^{-|t|}$ är ej deriverbar i $t = 0$.

b) Nej, ty $\sin t$ går ej mot 0 då $t \to \infty$.

c) Ja! Derivering av $\varphi(t) = (\cos t)e^{-t^2}$ ger uttryck på formen

$$\varphi^{(k)}(t) = p_k(t)\cos t\, e^{-t^2} + q_k(t)\sin t\, e^{-t^2},$$

där p_k och q_k är polynom. (5.2) är därför uppfylld.

d) Man visar att $\varphi(t)$ är deriverbar i $t = \pm 1$ och att $\varphi^{(k)}(\pm 1) = 0$. Härav följer att $\varphi \in \mathcal{S}$. ∎

Anmärkning. Funktionen i d) är ett exempel på en funktion, ej identiskt lika med 0, som är oändligt deriverbar och som antar värdet 0 utanför ett begränsat intervall.

Exempel. Avgör om någon eller några av följande funktionaler definierar tempererade distributioner (element i $\mathcal{S}'$).

a) $\varphi \longmapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$

b) $\varphi \longmapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{t^2}\varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$

c) $\varphi \longmapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln|t|\,\varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$

Lösning.

a) Funktionalen $\varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt$ är ej linjär. Svaret är nej.

b) Nej, ty om vi väljer $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$, som är en testfunktion, gäller

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{t^2}e^{-t^2/2}\, dt = \infty.$$

Således är ej $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2}\varphi(t)\, dt$ definierad för alla testfunktioner. Funktionen e^{t^2} växer för snabbt då $|t| \to \infty$ för att definiera en tempererad distribution.

c) Vi observerar att funktionalen är linjär. Vidare är

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \ln|t|\,\varphi(t)\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|t||}{1+t^2}(1+t^2)\,|\varphi(t)|\,dt$$

$$\leq \max_{-\infty<t<\infty} |(1+t^2)\varphi(t)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|t||}{1+t^2}\,dt < \infty.$$

Om $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en nollföljd i $\mathcal{S}$ följer därför att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln|t|\,\varphi_n(t)\,dt \to 0,$$

då $n \to \infty$. Jfr (5.3).Alltså definierar denna funktional en tempererad distribution. ∎

Följande karakterisering av tempererade distributioner är mycket användbar.

Sats 5.1 (Laurent Schwartz' sats). *En linjär funktional f på $\mathcal{S}$ är kontinuerlig (d v s tillhör $\mathcal{S}\,'$) om och endast om det finns en konstant C och ett heltal $N \geq 0$ sådana att*

$$|< f, \varphi >| \leq C\,\|\varphi\|_N, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S},$$

där

$$\|\varphi\|_N = \max_{\substack{0\leq k\leq N \\ x\in\mathbb{R}}} (1+|x|)^N\,|D^k\varphi(x)|.$$

Beviset återfinns i appendix C.

5.3 Några viktiga distributioner

Tidigare har vi nämnt δ, Diracmåttet, som definieras genom funktionalen

$$\varphi \stackrel{\delta}{\longmapsto} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

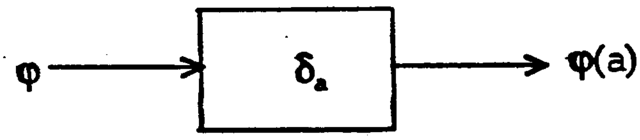
eller i lådform

$$\varphi \longrightarrow \boxed{\;\delta\;} \longrightarrow \varphi(0)$$

Analogt definierar man δ_a genom

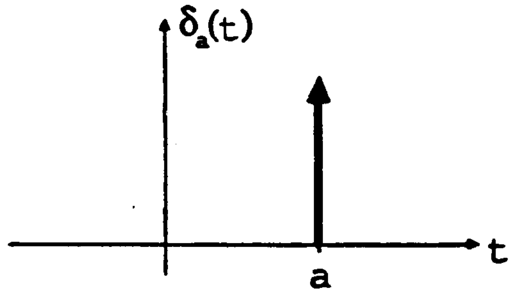
$$\varphi \overset{\delta_a}{\longmapsto} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\,dt = \varphi(a),$$

i lådform



Per definition är $\delta_a(t)$ och $\delta(t-a)$ samma distribution.

I diagram brukar man ibland rita en δ – distribution som en fet pil.



En viktig klass av distributioner är de som ges av vanliga funktioner.

Sats 5.2. *Om funktionen $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, är lokalt integrerbar, d v s*

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \infty$$

för varje talpar (a,b), $-\infty < a < b < \infty$, och om dessutom för något N

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^N}\,dt < \infty,$$

så definierar $f(t)$ en distribution genom

$$\varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Bevis. Lineariteten är uppenbar. Vidare är

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^N} |\varphi(t)|(1+|t|)^N\,dt$$

$$\le \max_{-\infty<t<\infty} |\varphi(t)|(1+|t|)^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{(1+|t|)^N}\,dt$$

och kontinuiteten följer, jfr (5.3). ∎

Anmärkning. Denna sats är lättare att använda än sats 5.1, men är ej lika stark: Det finns funktioner f som *kan* betraktas som tempererade distributioner trots att de ej uppfyller villkoren i sats 5.2 (se sista exemplet i avsnitt 5.6).

Det är viktigt att observera att om $f(t)$ ändras i enstaka punkter så ändras inte motsvarande distribution. Heavisides språngfunktion $H(t)$ ges av

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Observera att vi inte har definierat den för $t = 0$, men den är ändå väldefinierad som distribution.

Exempel. Följande vanliga funktioner definierar tempererade distributioner

$$\begin{array}{lll} 1,\ t,\ t^2, \ldots, & t^n, & \ln|t|, \\ H(t), & \operatorname{sgn} t, & e^{i\omega t}, \\ \cos\omega t, & \sin\omega t, & \end{array}$$

där ω är reellt. Funktionen $e^{(a+ib)t}$ definierar däremot ej någon tempererad distribution ifall $a \neq 0$. Om $a > 0$ växer den nämligen alldeles för snabbt då $t \to \infty$; om $a < 0$ inträffar detta då $t \to -\infty$.

Övning 1. Ange vilka av följande vanliga funktioner som även kan betraktas som distributioner

a) $f(t) = e^{3t} \sin t$

b) $f(t) = e^{3t} H(2-t)$

c) $f(t) = 5t^4 + 3t + 1$.

5.4 Likhet och stöd för distributioner

Definition. Med *stödet* för en funktion φ menas den minsta slutna mängd utanför vilken φ är lika med 0. Stödet för φ brukar betecknas med $\operatorname{supp}(\varphi)$. Vi har

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R};\ \varphi(x) \neq 0\}},$$

där $\overline{A}$ (*slutna höljet* av A) för en mängd A betecknar den minsta slutna mängd som innehåller A.

Exempel. För funktionen

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^3 - t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{f ö} \end{cases}$$

är $\operatorname{supp}(\varphi) = [-1, 1]$. Observera att $0 \in \operatorname{supp}(\varphi)$.

Att två distributioner är lika i enstaka punkter är inte väldefinierat. Däremot är det meningsfullt att säga att två distributioner $f(t)$ och $g(t)$ är lika på en öppen mängd.

Definition. Distributionerna $f(t)$ och $g(t)$ säges vara *lika på en öppen mängd A* om

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\,dt$$

för varje testfunktion $\varphi(t)$ med stöd på ett slutet begränsat (kompakt) intervall I, $I \subset A$.

Enligt ovanstående definition är distributionen $f(t)$ *lika med noll på den öppna mängden A* om

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = 0$$

för varje funktion φ med stöd på ett kompakt intervall I, $I \subset A$.

Med ovanstående definition är det meningsfullt att säga att deltadistributionen $\delta(t)$ är lika med noll på mängden $A = \{t \in \mathbb{R} : t \neq 0\}$.

Definition. Med *stödet* för en distribution f menas den minsta slutna mängd utanför vilken f är lika med 0.

Exempel. $\operatorname{supp}(\delta) = \{0\}$.

Övning 10. Vad är stödet för de distributioner som ges av funktionerna

a)
$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

b)
$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

c)
$$f(t) = H(t) + \delta(t+1)?$$

Definition. Med en *kompakt mängd* menar vi en sluten och begränsad delmängd av $\mathbb{R}$.

Exempel. Ett slutet intervall $[a, b]$ är kompakt om $-\infty < a \leq b < \infty$. Speciellt är $[a, a] = \{a\}$ kompakt.

Definition. En funktion eller en distribution säges ha *kompakt stöd* om stödet är en kompakt mängd.

Exempel. Om $a < b$ har funktionen $H(x-a)H(b-x)$ det kompakta stödet $[a, b]$.

Exempel. Distributionerna $\delta(x-a)$, $\delta'(x-a)$, $\delta''(x-a), \ldots$ har alla det kompakta stödet $\{a\}$.

5.5 Multiplikation av distributioner

Multiplikation av två distributioner är i allmänhet inte möjlig, men varje distribution kan multipliceras med måttligt växande funktioner.

Definition. En *måttligt växande funktion* μ är en överallt oändligt många gånger deriverbar funktion, sådan att varje derivata växer högst som ett polynom, d v s till varje heltal k finns två tal $C = C(k)$ och $N = N(k) \geq 0$ sådana att

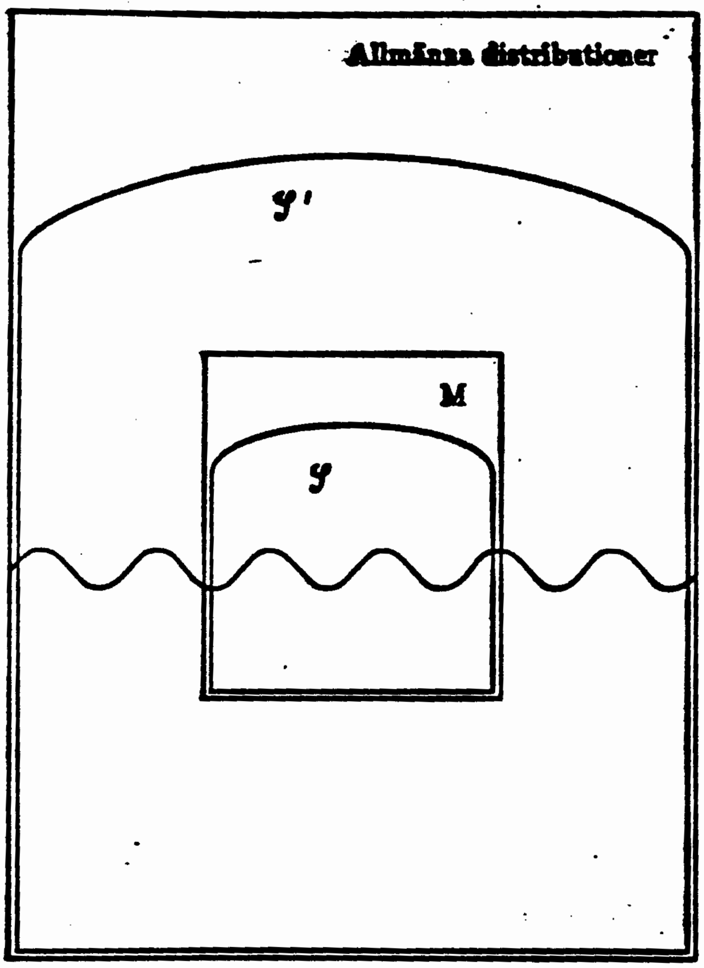
$$\left|\mu^{(k)}(t)\right| \leq C(1+|t|)^N.$$

Exempel på måttligt växande funktioner är t ex e^{it}, e^{it^2} och alla polynom.

Anmärkning. Det är ofta praktiskt att säga *multiplikator* i stället för "måttligt växande funktion".

Exempel. Av en testfunktion φ krävs att varje derivata $D^k\varphi(t) = \varphi^{(k)}(t)$ skall avta snabbare än *varje* potens av t då $|t| \to \infty$. Av en måttligt växande funktion μ krävs bara att varje derivata $D^k\mu(t) = \mu^{(k)}(t)$ skall växa långsammare än *någon* potens av t då $|t| \to \infty$. Det betyder att varje testfunktion också är en måttligt växande funktion. Omvändningen gäller ej!

Exempel. Av sats 5.2 följer att varje måttligt växande funktion $\mu(t)$ kan betraktas som en distribution. Förhållandena mellan de olika klasser vi infört åskådliggörs kanske bäst i ett mängddiagram.



$\mathcal{S}'$ = klassen av tempererade distributioner.
M = klassen av måttligt växande funktioner = klassen av multiplikatorer.
$\mathcal{S}$ = Schwartzklassen av testfunktioner.
Under den vågade linjen ryms bara funktioner och distributioner med kompakt stöd.

Exempel. En rationell funktion

$$\mu(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

där P och Q är polynom, är en måttligt växande funktion om Q *saknar* reella nollställen.

Övning 11. Visa att om φ är en testfunktion och μ är en måttligt växande funktion så är $\varphi \cdot \mu$ en testfunktion.

Definition. Produkten $\mu(t)\,f(t) = f(t)\mu(t)$ av en måttligt växande funktion $\mu(t)$ och en distribution $f(t)$ definieras genom att

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mu(t)\,f(t)]\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\mu(t)]\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[\mu(t)\,\varphi(t)]\,dt \tag{5.6}$$

för alla $\varphi \in \mathcal{S}$.

Högerledet i (5.6) är väldefinierat eftersom, enligt övningen ovan, en testfunktion multiplicerad med en måttligt växande funktion också är en testfunktion.

Exempel. Låt $\mu(t)$ vara en måttligt växande funktion. Då gäller

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [\mu(t)\,\delta(t)]\,\varphi(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,[\mu(t)\,\varphi(t)]\,dt \\ &= \mu(0)\,\varphi(0) = \mu(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(0)\,\delta(t)\,\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Enligt definitionen av likhet mellan distributioner gäller att

$$\mu(t)\,\delta(t) = \mu(0)\,\delta(t).$$

Analogt kan man visa reduktionsregeln $\mu(t)\,\delta(t-a) = \mu(a)\,\delta(t-a)$.

Övning 12. Undersök om nedstående funktioner är testfunktioner, måttligt växande funktioner eller ingetdera.

a) $f(t) = \tanh t$.

b) $g(t) = \dfrac{d}{dt} \tanh t$.

c) $h(t) = \dfrac{(e^t - 1)^2}{(e^{t^2} - 1)}$.

d) $\dfrac{t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1}{t + 1}$.

e) $\dfrac{t^4 + t^3 + t^2 + 1}{t + 1}$.

Övning 13. Förenkla $\dfrac{1 + \sin t}{t^2 + 1}\,\delta(t)$.

5.6 Derivation av distributioner

Om *både* f och φ är testfunktioner gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Eftersom φ och f ligger i $\mathcal{S}$ försvinner de utintegrerade termerna och resultatet blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Om φ är en testfunktion är också φ' en testfunktion. *Därmed är högerledet väldefinierat också då $f(t)$ är en distribution.* Vi kan härigenom använda (5.7) som en definition av distributionsderivatan.

Definition. Derivatan $Df = f'$ av distributionen f definieras av

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

för varje testfunktion φ.

Distributionen $f'(t)$ är således den linjära funktional som tilldelar testfunktionen $\varphi(t)$ värdet

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Denna definition är mycket central och illustrerar viktiga egenskaper hos distributionsteorin.

(i) Definitionen skrivs som ett integralsamband.

(ii) Operationer (som derivering), vilka *apriori* ej kan utföras på distributionerna, utförs på testfunktionerna, där de är väldefinierade.

Derivation av distributioner är således *alltid* en tillåten operation.

Definition. Den k:te derivatan $D^k f = f^{(k)}$ av en distribution f definieras av

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^k f(t)\varphi(t)\,dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(t)D^k\varphi(t)\,dt, \quad k = 0,1,2,\dots,$$

för alla $\varphi \in \mathcal{S}$.

Observera att varje *tänkt* partialintegration ger ett teckenbyte, därav faktorn $(-1)^k$.

Exempel. Beräkna distributionsderivatan av Heavisidefunktionen

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Lösning. Enligt definitionen ges H' av att

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(t)\,dt$$
$$= -\big[\varphi(t)\big]_0^{\infty} = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0).$$

Men

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt.$$

Definitionen av likhet för distributioner ger nu att

$$H'(t) = \delta(t)$$

och exemplet i avsnitt 5.1 framstår i nytt ljus.

Övning 14. (Produktregeln.) Visa att om μ är en måttligt växande funktion och f en distribution så gäller att

$$D\big[\mu(t)f(t)\big] = \mu'(t)f(t) + \mu(t)f'(t).$$

Definition. (Linjärt koordinatbyte.) Låt $a \neq 0$ och b vara reella tal. För en distribution $f \in \mathcal{S}'$ definieras distributionen $f(at+b)$ genom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at+b)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}\,dx.$$

Exempel. Distributionen $\delta(2t-6)$ ges av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(2t-6)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi\left(\frac{x+6}{2}\right)\frac{1}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\varphi(3)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(t-3)\varphi(t)\,dt.$$

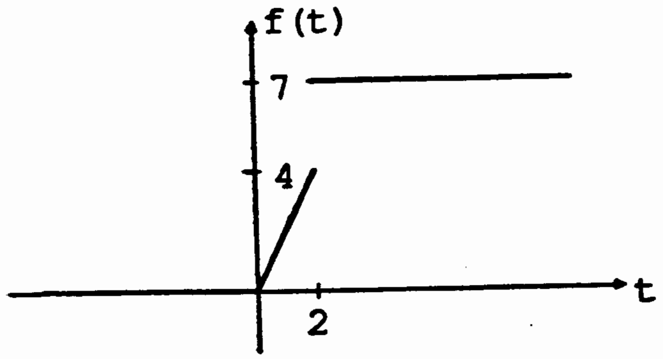
Enligt definitionen av likhet för distributioner är således $\delta(2t-6) = \frac{1}{2}\delta(t-3)$.

Övning 15. Visa att $H'(t-a) = \delta(t-a)$.

Exempel.
a) Skriv med hjälp av Heavisidefunktionen $H(t)$ funktionen $f(t)$ given av

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t, & 0 < t < 2 \\ 7 & t > 2. \end{cases}$$

b) Beräkna distributionsderivatan av f.

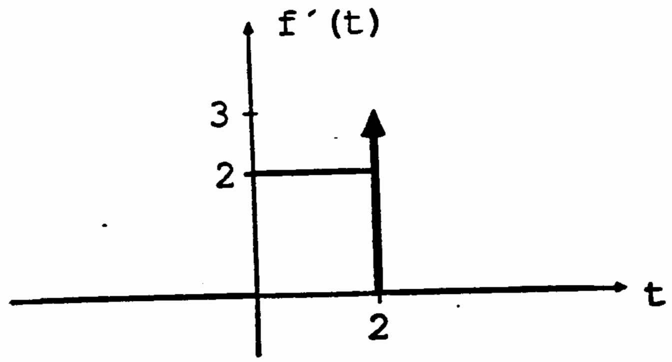


Lösning.
a) $f(t) = 2t\big(H(t) - H(t-2)\big) + 7H(t-2)$
b) Med hjälp av produktregeln fås

$$f'(t) = 2t\big(\delta(t) - \delta(t-2)\big) + 2\big(H(t) - H(t-2)\big) + 7\delta(t-2).$$

Enligt föregående övning är $H'(t-a) = \delta(t-a)$ och räkneregeln $\mu(t)\delta(t-a) = \mu(a)\delta(t-a)$ ger nu

$$f'(t) = 2\big(H(t) - H(t-2)\big) + 3\delta(t-2).$$



Vi observerar att den första termen är den vanliga punktvisa derivatan. Den andra termen är ett bidrag från språnget i $t = 2$.

Genom att systematiskt subtrahera bort språng med hjälp av Heavisidefunktionen kan man relativt lätt bevisa följande sats.

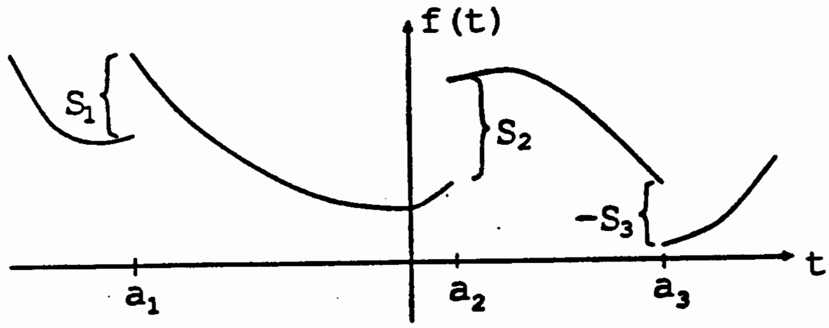
Sats 5.3. *Antag att f är styckvis deriverbar utom i punkterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$, där f har språng av höjd $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Då är distributionsderivatan av f lika med*

$$f'(t) = [f'(t)]_p + \sum_{k=1}^{n} s_k \delta(t - a_k),$$

där $[f'(t)]_p$ betecknar den punktvisa derivatan av f, som är definierad utom för $t = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, och s_k är sprången

$$s_k = f(a_k + 0) - f(a_k - 0), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Om speciellt f är kontinuerlig (d v s alla $s_k = 0$), så är $f'(t) = [f'(t)]_p$.



Övning 16. Beräkna genom direkt användning av definitionen distributionsderivatan av
a) $tH(t)$ b) $e^{-t}H(t)$ c) $H(t) - H(t-1)$

Övning 17. Beräkna distributionsderivatan av

$$f(t) = \begin{cases} |t+2|, & t < 0 \\ \sin t, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ e^{-t}, & t > \pi/2. \end{cases}$$

Skissera f och f'.

Hur konstig kan en tempererad distribution vara? Vi har infört en relativt snäv klass $\mathcal{S}$ av testfunktioner, vilket ger en relativt rymlig klass $\mathcal{S}'$ av distributioner. Men hur stor? Svaret är: inte större än nödvändigt. Detta lättande besked ges av följande sats.

Sats 5.4 (Struktursats för tempererade distributioner). *Varje tempererad distribution är en upprepad derivata av en kontinuerlig funktion med högst polynomiell växt:*
Varje tempererad distribution f kan skrivas

$$f = D^N F$$

där $N \geq 0$ är ett heltal och F är en kontinuerlig funktion som växer högst polynomiellt, d v s för några positiva konstanter C och m gäller att

$$|F(x)| \leq C(1+|x|)^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Omvänt gäller att om F växer högst polynomiellt och $N \geq 0$ är ett heltal så är $D^N F$ en temperarad distribution.

Beviset bygger på sats 5.1 men måste här överhoppas.

Satsen kan också formuleras så: Till varje $f \in \mathcal{S}'$ finns två heltal $N \geq 0$ och $k \geq 0$ och en *kontinuerlig begränsad* funktion G sådana att

$$f(x) = D^N\left\{(1+x^2)^k G(x)\right\}.$$

Det spelar ingen roll här om vi använder faktorn $(1+x^2)^k$ eller $(1+|x|)^m$. Derivatorna är naturligtvis tagna i distributionsmening.

För att generera *hela klassen* $\mathcal{S}'$ kan man alltså gå tillväga på följande vis:

1. Tag *alla* kontinuerliga begränsade funktioner på $\mathbb{R}$. Låt dem utgöra klassen BC.
2. Multiplicera dem med *alla* polynom. Om $Pol = \{$ polynom $\}$ kan vi skriva resultatet som

$$Pol \cdot \mathrm{BC}.$$

3. Tag nu alla derivator. Symboliskt kan vi beteckna slutprodukten med

$$Der(Pol \cdot \mathrm{BC}).$$

Detta är hela klassen $\mathcal{S}'$.

Exempel. För Diracpulsen gäller $\delta(x) = D\,H(x) = D^2\{xH(x)\}$. Som $F(x)$ duger $xH(x)$.

Exempel. Funktionen $f(x) = e^x \cos e^x$ kan ej definieras som tempererad distribution m h a sats 5.2, ty

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N}\, dx = \infty$$

för alla heltal N. Däremot kan $F(x) = \sin e^x$ definieras som tempererad distribution m h a sats 5.2, ty $|F(x)| \leq 1$ för alla x. Eftersom $f = F'$ så definierar vi f såsom tempererad distribution genom formeln $f = DF$.

5.7 Konvergens i distributionsmening

En stor fördel med distributioner är att derivation alltid är möjlig. En annan är att många resonemang om konvergens blir mycket enkla då man inför ett nytt konvergensbegrepp.

Definition. Låt $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ och f vara tempererade distributioner. Vi säger att $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i distributionsmening om

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)\, dt$$

existerar för alla testfunktioner φ och är lika med $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\, dt$. Vi skriver $f_n \to f$ i $\mathcal{S}'$ då $n \to \infty$.

Följande sats ger ett för klassisk analys förvånande resultat.

Sats 5.5. *Antag att $f_n \to f$ i $\mathcal{S}'$ då $n \to \infty$. Då gäller $f_n' \to f'$ i $\mathcal{S}'$.*

Bevis. Det gäller för varje testfunktion φ att

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt. \tag{5.8}$$

Enligt definitionen av distributionsderivata är

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Enligt (5.8) gäller

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi'(t)\,dt \to -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt$$

då $n \to \infty$. Genom att tillämpa definitionen av distributionsderivata på nytt får vi slutligen

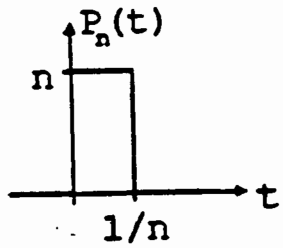
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n'(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt.$$

■

Från definitionen ovan följer att om $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en följd som konvergerar likformigt mot f så konvergerar f_n också i distributionsmening mot f. Om däremot en följd av funktioner $\{f_n\}$ konvergerar mot f punktvis behöver inte f_n konvergera mot f i distributionsmening eller omvänt.

Exempel. Låt

$$P_n(t) = \begin{cases} n, & 0 < t < 1/n \\ 0, & \text{f ö.} \end{cases}$$



Visa att $P_n \to \delta$ i $\mathcal{S}'$ då $n \to \infty$.

Lösning. Vi måste visa att

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt$$

för alla $\varphi \in \mathcal{S}$. Enligt integralkalkylens medelvärdessats gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)\varphi(t)\,dt = n\int_{0}^{1/n} \varphi(t)\,dt = n\cdot\frac{1}{n}\varphi(\xi) = \varphi(\xi),$$

där $0 < \xi < 1/n$. Då $n \to \infty$ följer att

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt.$$

Vi har visat att $P_n(t) \to \delta(t)$ i $\mathcal{S}'$ då $n \to \infty$. Punktvis gäller däremot att $P_n(t) \to 0$ då $n \to \infty$ för alla t. ∎

Exempel. Bestäm i distributionsmening gränsvärdena

a) $\lim_{|\alpha| \to \infty} e^{-i\alpha t}$

b) $\lim_{|\alpha| \to \infty} \cos \alpha t$ och $\lim_{|\alpha| \to \infty} \sin \alpha t$

där α är en reell parameter.

Lösning.

a) Funktionerna $e^{-i\alpha t}$, $\cos \alpha t$ och $\sin \alpha t$ är alla enligt sats 5.2 distributioner. Låt $\varphi \in \mathcal{S}$ och sätt

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \varphi(t)\, dt.$$

Partiell integration i vanlig mening ger

$$I(\alpha) = \lim_{T \to \infty} \left\{ \left[\frac{e^{-i\alpha t}\varphi(t)}{-i\alpha} \right]_{-T}^{T} - \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\alpha t}}{-i\alpha} \varphi'(t)\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} \varphi'(t)\, dt.$$

Eftersom $\varphi \in \mathcal{S}$ är integralen $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(t)|\, dt$ ändlig, varav

$$|I(\alpha)| \le \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(t)|\, dt \to 0$$

då $|\alpha| \to \infty$. Vi har visat att $e^{-i\alpha t} \to 0$ i $\mathcal{S}'$ då $|\alpha| \to \infty$.

b) Genom Eulers formler ser man att även $\sin \alpha t$ och $\cos \alpha t \to 0$ i $\mathcal{S}'$ då $|\alpha| \to \infty$.

Definition. En serie av distributioner $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ säges konvergera i distributionsmening med summa f om

$$\lim_{M,N \to \infty} \sum_{n=-N}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\, dt$$

för alla $\varphi \in \mathcal{S}$. För en i distributionsmening konvergent serie $\sum f_n$ gäller alltså att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_n f_n(t)\varphi(t)\, dt = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\varphi(t)\, dt. \tag{5.9}$$

Följande sats säger att man kan derivera termvis i distributionsmening obegränsat antal gånger.

Sats 5.6. *Antag att serien* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ *konvergerar mot* f *i distributionsmening. Då gäller*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D^k f_n = D^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = D^k f$$

för $k = 0, 1, 2, \ldots$, *med konvergens i* $\mathcal{S}\,'$.

Bevis. Tillämpa Sats 5.5 upprepade gånger.

5.8 Periodiska distributioner och generaliserade fourierserier

Definition. En distribution f kallas *periodisk* med period T om likheten

$$f(t) = f(t+T)$$

gäller i distributionsmening, d v s om

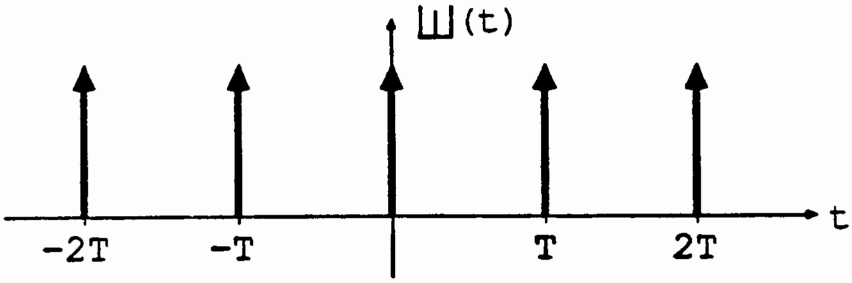
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+T)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\varphi(v-T)\,dv$$

för varje testfunktion φ.

Exempel. Pulståget

$$Ш(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mT)$$

är en periodisk distribution med period T.



Bokstaven Ш är närmast tagen från det kyrilliska alfabetet och kallas sja på ryska. Den härstammar från det hebreiska alfabetet.

Exempel. Visa att verkan av Ш på en testfunktion φ ges av

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ш(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(mT). \tag{5.10}$$

Lösning. Enligt (5.9) blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ш(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mT)\varphi(x)\,dx$$
$$\doteq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - mT)\varphi(x)\,dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(mT),$$

och denna summa är konvergent i vanlig mening för varje testfunktion φ. ∎

En periodisk distribution kan, liksom en periodisk funktion, utvecklas i fourierserie. Låt distributionen f ha period T. Hur skall vi definiera dess fourierkoefficienter? Helst vill vi beräkna dem enligt formeln

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\Omega t}\,dt, \quad \Omega T = 2\pi. \tag{5.11}$$

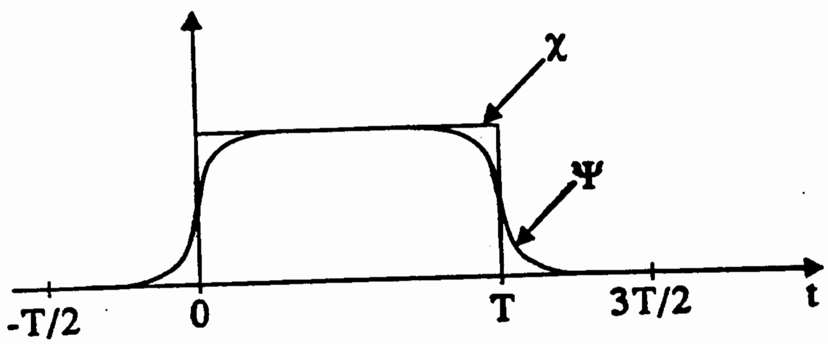
Om vi inför den karakteristiska funktionen för intervallet $[0, T]$,

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T, \\ 0, & \text{f ö}, \end{cases}$$

kan (5.11) skrivas

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-in\Omega t}\chi(t)\,dt.$$

Det formella problemet är att funktionen $e^{-in\Omega t}\chi(t)$ ej är en testfunktion, eftersom χ är diskontinuerlig. Detta kan lätt avhjälpas. Vi fasar helt enkelt av kanterna på grafen till χ (se figur).



I appendix D visas hur detta kan göras så att den nya funktionen Ψ satisfierar nedanstående krav.

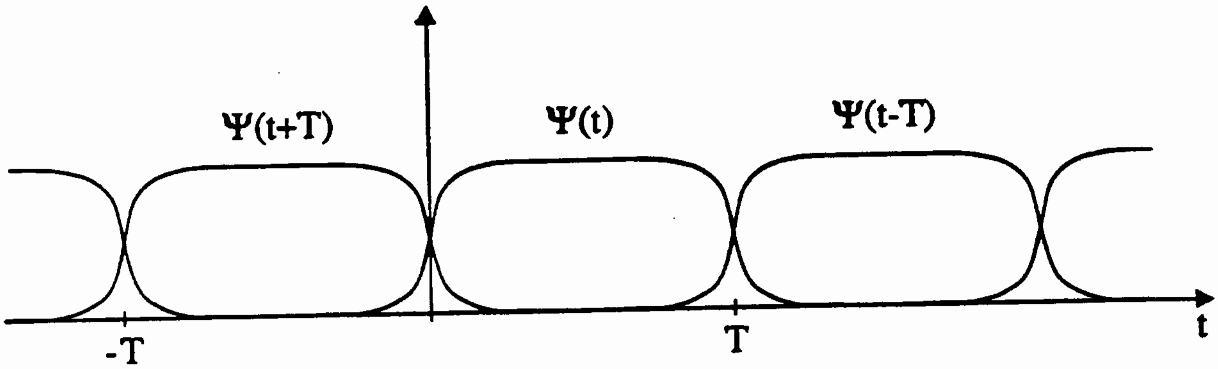
(i) $0 \leq \Psi(t) \leq 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\Psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, d v s Ψ har kontinuerliga derivator av alla ordningar.

(iii) $\Psi(t) = 0$ utanför intervallet $-T/2 < t < 3T/2$, (5.12)

(iv) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi(t - kT) = 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$. (5.13)

Tagna tillsammans innebär (ii) och (iii) att Ψ är en testfunktion med kompakt stöd. Vi illustrerar (iv) med en figur.



Observera att högst två termer i summan (5.13) kan vara skilda från noll samtidigt (d v s för ett givet t).

För varje heltal n är produkten $e^{-in\Omega t}\Psi(t)$ en testfunktion och vi kan nu införa följande korrekta

Definition. Fourierkoefficienterna $c_n(f)$ till en periodisk distribution f ges av

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)e^{-in\Omega t}\, dt. \tag{5.14}$$

För konkreta distributioner och vid problemlösning behöver man emellertid inte använda denna vid första anblick något egendomliga definition. Man klarar sig nämligen alltid med den intuitiva formeln

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{a}^{a+T} f(t)e^{-in\Omega t}\, dt, \tag{5.15}$$

om man bara väljer konstanten a så att distributionen $f(t)$ nära $t = a$ ges av en vanlig funktion. Detta brukar kallas "snälla gränser".

Vi skall visa att den nya formeln (5.14) ej strider mot den gamla formeln (5.15).

Sats 5.7. *Låt f vara en vanlig T-periodisk funktion, som är integrerbar över en period, d v s*

$$\int_a^{a+T} |f(t)|\, dt < \infty. \tag{5.16}$$

Då stämmer formlerna (5.14) och (5.15) överens.

Bevis. Vi omformar (5.14) i steg.

$$Tc_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)e^{-in\Omega t}\, dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{a+lT}^{a+(l+1)T} f(t)\Psi(t)e^{-in\Omega t}\, dt$$

$$= [\, t = x + lT] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_a^{a+T} f(x+lT)\Psi(x+lT)e^{-in\Omega(x+lT)}\, dx$$

$$= [\, f \text{ periodisk}, \ n\Omega\, lT = nl \cdot 2\pi] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_a^{a+T} f(x)\Psi(x+lT)e^{-in\Omega x}\, dx$$

$$= [\text{ p g a (5.16)}] = \int_a^{a+T} f(x) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Psi(x+lT)e^{-in\Omega x}\, dx$$

$$= [\text{ formel (5.13)}] = \int_a^{a+T} f(x)e^{-in\Omega x}\, dx.$$

Vi har visat att formel (5.14) ger formel (5.15). ∎

Exempel. Fourierserieutveckla Ш! Enligt (5.14) är

$$Tc_n(Ш) = \int_{-\infty}^{\infty} Ш(t)e^{-in\Omega t}\Psi(t)\, dt = [\text{ formel (5.10)}]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-in\Omega mT}\Psi(mT) = [\, \Omega T = 2\pi, \ n \text{ och } m \text{ heltal}]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Psi(mT) = \Psi(0) + \Psi(T) = 1,$$

d v s

$$c_n(Ш) = \frac{1}{T} \qquad \text{för alla } n.$$

Detta resultat kommer man också till om man i formel (5.15) väljer t ex $a = -T/2$,

$$Tc_n(Ш) = \int_{-T/2}^{T/2} Ш(t)e^{-in\Omega t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT)e^{-in\Omega t}\, dt$$

$$= [\text{ bara mittpulsen } m = 0 \text{ bidrar}] = \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-in\Omega t}\, dt = 1.$$ ∎

Till varje periodisk distribution f kan vi ordna en fourierserie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{in\Omega t}.$$

Om f är en vanlig funktion blir det en vanlig fourierserie (kapitel 1). I annat fall kallas den en *generaliserad fourierserie.*

Exempel. Pulståget $\text{Ш}(t)$ har den generaliserade fourierserien

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}.$$

Den är ej konvergent i vanlig mening. Att den är konvergent i distributionsmening följer av sats 5.9.

I beviset av sats 5.9 kommer vi att behöva följande hjälpsats, som även är av eget intresse. Den visar hur man på ett naturligt sätt kan förknippa en periodisk funktion Φ med en aperiodisk funktion φ, så att fourierkoefficienterna för Φ ges av fouriertransformen för φ.

Sats 5.8. *Låt φ vara en testfunktion i $\mathcal{S}$ och*

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t+kT). \tag{5.17}$$

Då gäller att

(i) Φ *är periodisk med period* T.

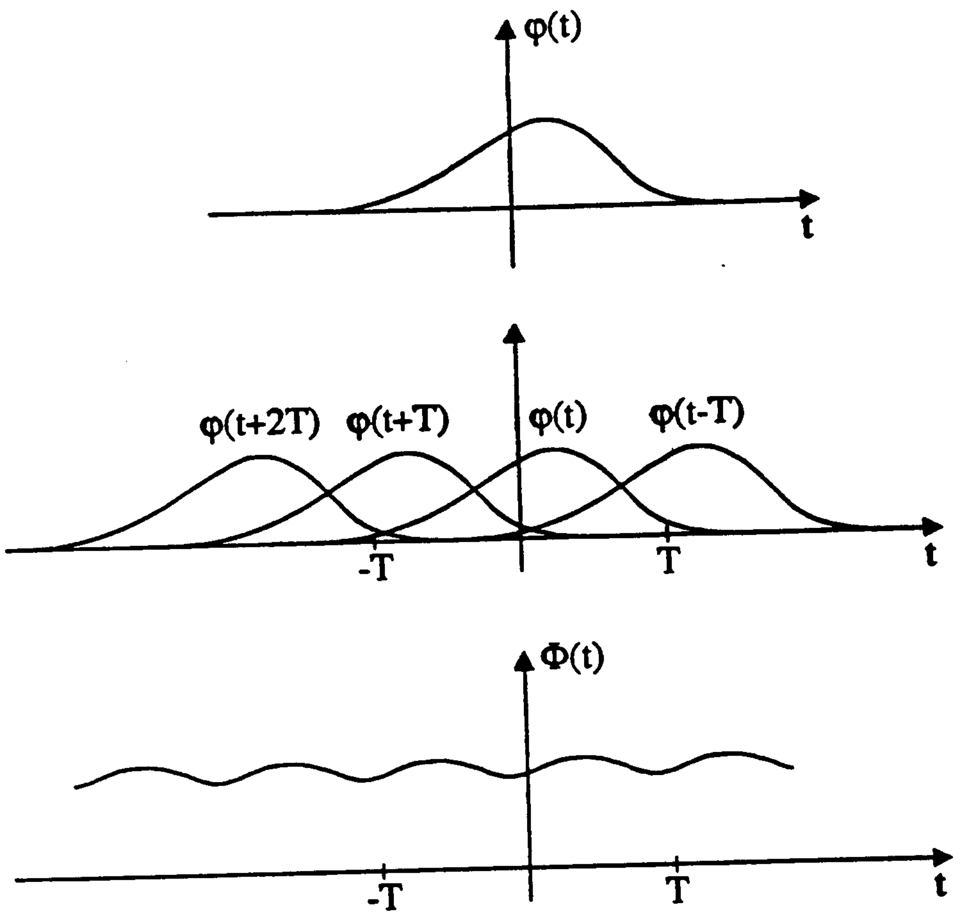
(ii) Φ *är absolutintegrabel över en period.*

(iii) $c_n(\Phi) = \dfrac{1}{T}\widehat{\varphi}(n\Omega)$,

(iv) $\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n\Omega)e^{in\Omega t} = \Phi(t)$.

Bevis. Som testfunktion avtar $\varphi(x)$ snabbt då $|x| \to \infty$. Därför konvergerar summan (5.17). Del (i) lämnas åt läsaren. För del (ii) uppskattar vi

$$\begin{aligned}\int_0^T |\Phi(t)|\,dt &= \int_0^T \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t+kT)\right| dt \le \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi(t+kT)|\,dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T |\varphi(t+kT)|\,dt = [x = t+kT] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} |\varphi(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx < \infty.\end{aligned}$$



På samma sätt gör vi del (iii):

$$Tc_n(\Phi) = \int_0^T \Phi(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \ldots =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T \varphi(t+kT)e^{-in\Omega t}\,dt = [x = t + kT,\ \Omega T = 2\pi,\ e^{in\Omega T} = 1]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} \varphi(x)e^{-in\Omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-in\Omega x}\,dx$$

$$= \widehat{\varphi}(n\Omega).$$

Enligt sats 5.13 nedan är $\widehat{\varphi}$ en testfunktion eftersom φ är det. Därför avtar talen $\widehat{\varphi}(n\Omega)$ snabbt då $|n| \to \infty$. Det betyder att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(\Phi)| = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(n\Omega)| < \infty.$$

Enligt sats 1.4 konvergerar fourierserien för Φ mot funktionen Φ och vi får därför

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t+kT) = \Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\Phi)e^{in\Omega t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n\Omega)e^{in\Omega t}. \tag{5.17'}$$

∎

Efter dessa förberedelser är vi mogna för

Sats 5.9 (Huvudsats för periodiska distributioner).

a) *Varje periodisk distribution f har en generaliserad fourierserie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{in\Omega t} \tag{5.18}$$

med fourierkoefficienter, som uppfyller $c_n = O(|n|^k)$ för något heltal k. Serien (5.18) konvergerar i distributionsmening mot f.

b) *Omvänt gäller att varje serie på formen*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\Omega t} \tag{5.19}$$

konvergerar i distributionsmening, förutsatt att koefficienterna γ_n uppfyller $\gamma_n = O(|n|^k)$ för något heltal k. Seriens summa är en periodisk distribution, och för denna distribution f gäller att

$$c_n(f) = \gamma_n.$$

Bevis av del a).

a) Vi tillämpar sats 5.1 med $\varphi(t) = e^{-in\Omega t}\Psi(t)$ på formel (5.14).

$$T\,|c_n| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-in\Omega t}\Psi(t)\,dt\right| \le C \max_{\substack{0\le k\le N\\ t\in\mathbb{R}}} (1+|t|)^N \left|D^k\varphi(t)\right|.$$

För alla t gäller att

$$(1+|t|)^N \left|D^k\varphi(t)\right| \le \left(1+\frac{3T}{2}\right)^N \left|D^k\varphi(t)\right|,$$

eftersom $\varphi(t) = 0$ då $|t| > 3T/2$ enligt (5.12). Funktionen Ψ är fixerad. Varje derivata $\Psi^{(j)}(t)$ är begränsad, $\left|\Psi^{(j)}(t)\right| \le$ någon konstant A_j. Vi uppskattar först de två lägsta derivatorna av φ.

$$\begin{aligned}
D\varphi(t) &= (-in\Omega)e^{-in\Omega t}\Psi(t) + e^{-in\Omega t}\Psi'(t),\\
|D\varphi(t)| &\le n\Omega\,|\Psi(t)| + |\Psi'(t)| \le n\Omega A_0 + A_1,\\
D^2\varphi(t) &= (e^{-in\Omega t})''\Psi(t) + 2(e^{-in\Omega t})'\Psi'(t) + (e^{-in\Omega t})\Psi''(t),\\
\left|D^2\varphi(t)\right| &\le (n\Omega)^2\,|\Psi(t)| + 2(n\Omega)\,|\Psi'(t)| + |\Psi''(t)| \le (n\Omega)^2 A_0 + 2(n\Omega)A_1 + A_2.
\end{aligned}$$

Med dessa specialfall framför ögonen kan man övertyga sig om att

$$|D^k\varphi(t)| \le (n\Omega)^k A_0 + k(n\Omega)^{k-1}A_1 + \ldots + A_k.$$

Alltså är

$$T|c_n| \le C\left(1+\frac{3T}{2}\right)^N \left[(n\Omega)^k A_0 + k(n\Omega)^{k-1}A_1 + \ldots + A_k\right],$$

d v s

$$c_n = \mathcal{O}\left(|n|^k\right) \quad \text{då } |n| \to \infty.$$

Det återstår att visa att serien (5.18) konvergerar i $\mathcal{S}'$. Vi bildar därför delsumman

$$S(t) = \sum_{n=-M}^{M} c_n(f)e^{in\Omega t}.$$

Vi måste visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\varphi(t)\,dt \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \quad \text{då } M\to\infty \text{ för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.20}$$

Det gör vi i tre steg genom att visa följande tre påståenden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{n=-M}^{M} c_n(f)\widehat{\varphi}(-n\Omega) \tag{5.21}$$

Serien $\sum c_n(f)\widehat{\varphi}(-n\Omega)$ är absolutkonvergent, d v s

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|\cdot|\widehat{\varphi}(-n\Omega)| < \infty \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\widehat{\varphi}(-n\Omega) \tag{5.23}$$

Steg 1. Vi verifierar formel (5.21).

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-M}^{M} c_n(f)e^{in\Omega t}\varphi(t)\,dt$$
$$= \sum_{n=-M}^{M} c_n(f)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{in\Omega t}\,dt = \sum_{n=-M}^{M} c_n(f)\widehat{\varphi}(-n\Omega).$$

Steg 2. Enligt sats 5.13 nedan gäller att $\widehat{\varphi}$ är en testfunktion om φ är en testfunktion. Således avtar $\widehat{\varphi}(\omega)$ snabbare än varje potens av $1/\omega$ då $|\omega| \to \infty$, d v s $\widehat{\varphi}(-n\Omega)$ avtar snabbare än varje potens av $1/(n\Omega)$ då $|n| \to \infty$. Detta medför att produkten $c_n(f)\widehat{\varphi}(-n\Omega)$ avtar så snabbt då $|n| \to \infty$ att (5.22) gäller.

Steg 3. I en rad småsteg omformar vi gradvis $\sum c_n(f)\widehat{\varphi}(-n\Omega)$. Markeringen [*] nedan står för förklaringen [f *kontinuerlig* linjär funktional på $\mathcal{S}$] och betyder att vi får ta dessa småsteg just därför att f är *kontinuerlig* som funktional. Vi avstår emellertid från att här närmare gå in på detta.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\widehat{\varphi}(-n\Omega) = [\text{formel (5.14)}]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(-n\Omega)\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)e^{-in\Omega t}\,dt = [*]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(-n\Omega)e^{-in\Omega t}\,dt = [\text{sats 5.8 (iv)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t+kT)\,dt = [*]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)\varphi(t+kT)\,dt = [x = t + kT]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-kT)\Psi(x-kT)\varphi(x)\,dx = [f \text{ periodisk}]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Psi(x-kT)\varphi(x)\,dx = [*]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi(x-kT)\varphi(x)\,dx = [\text{formel (5.13)}]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

■

Bevis av del b). Antag nu att $\gamma_n = O\left(|n|^k\right)$ och sätt

$$S_M(t) = \sum_{n=-M}^{M} \gamma_n e^{in\Omega t}.$$

(i) Om $k \le -2$ avtar γ_n snabbare än $1/n^2$ då $n \to \infty$, varför

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty.$$

Härav följer att den kontinuerliga funktionen S_M konvergerar likformigt mot en kontinuerlig funktion f då $M \to \infty$. Den likformiga konvergensen medför också att

$$c_n(f) = \gamma_n.$$

Funktionen f kan förstås även betraktas som en distribution.

(ii) Om $k > -2$ sätter vi

$$\delta_n = \frac{\gamma_n}{(in\Omega)^{k+2}}, \quad n \neq 0,$$
$$\delta_0 = 0,$$

och

$$G_M(t) = \sum_{n=-M}^{M} \delta_n e^{in\Omega t}.$$

Av villkoret $\gamma_n = \mathcal{O}\left(|n|^k\right)$ följer att

$$\delta_n \leq \frac{C}{n^2},$$

där C är en konstant. Alltså konvergerar den kontinuerliga funktionen G_M likformigt mot en kontinuerlig funktion g då $M \to \infty$. Vi kan betrakta G_M och g som distributioner. Av att

$$G_M \to g \quad \text{likformigt då } M \to \infty$$

följer att

$$G_M \to g \quad \text{i distributionsmening då } M \to \infty.$$

Upprepad användning av sats 5.5 ger nu att

$$S_M - \gamma_0 = D^{k+2} G_M \to D^{k+2} g \quad \text{i } \mathcal{S}' \text{ då } M \to \infty.$$

Om vi definierar distributionen $f = \gamma_0 + D^{k+2} g$ gäller sålunda att

$$S_M \to f \quad \text{i } \mathcal{S}'. \tag{5.24}$$

Eftersom S_M har period T måste f vara en periodisk distribution med period T. Nu återstår bara att visa att $c_n(f) = \gamma_n$. Vi använder definitionen (5.14) och får

$$Tc_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)e^{-in\Omega t}\,dt = [\text{formel } (5.24)]$$
$$= \lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(t)\Psi(t)e^{-in\Omega t}\,dt.$$

Den kontinuerliga funktionen S_M uppfyller förutsättningarna för sats 5.7. Alltså gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_M(t)\Psi(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \int_0^T S_M(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \begin{cases} T\gamma_n, & |n| \leq M, \\ 0, & |n| > M, \end{cases}$$

varav

$$Tc_n(f) = \lim_{M\to\infty} T\gamma_n = T\gamma_n. \qquad \blacksquare$$

Exempel. Antag att f är en T–periodisk funktion som är integrerbar över en period, d v s

$$\int_0^T |f(t)|\,dt = A < \infty.$$

Då gäller för dess fourierkoefficienter att

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\Omega t}\,dt \right| \\ &\le \frac{1}{T} \int_0^T \left| f(t) e^{-in\Omega t} \right| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|\,dt = \frac{A}{T} < \infty. \end{aligned}$$

Således uppfyller de relationen

$$c_n(f) = \mathcal{O}(|n|^k)$$

med $k = 0$ (de är begränsade då $|n| \to \infty$). Fourierserien för f behöver *inte* konvergera mot f i vanlig mening. (Det finns ett berömt motexempel av Kolmogórov från år 1926.) Däremot konvergerar serien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\Omega t}$$

mot $f(t)$ i distributionsmening. ∎

När man arbetar med generaliserade fourierserier har man ofta nytta av följande

Sats 5.10. *En vanlig eller generaliserad fourierserie får deriveras termvis hur många gånger som helst i distributionsmening med en ny generaliserad fourierserie som resultat.*

Bevis. Låt koefficienterna γ_n i serien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\Omega t}$$

uppfylla $\gamma_n = \mathcal{O}(|n|^k)$ då $|n| \to \infty$ för något heltal k. Derivera serien termvis l gånger! Resultatet är serien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in\Omega)^l \gamma_n e^{in\Omega t},$$

vars koefficienter $\delta_n = (in\Omega)^l \gamma_n$ uppfyller

$$\delta_n = \mathcal{O}(|n|^{k+l}) \quad \text{då } |n| \to \infty.$$

Den deriverade serien är enligt sats 5.9 en generaliserad fourierserie (den är konvergent i distributionsmening). ∎

Exempel. Det finns ett enkelt samband mellan sågtandsfunktionen i sats 1.10 och pulståget Ш. Vi visar detta för allmän period T och inför den T-periodiska sågtandsfunktionen

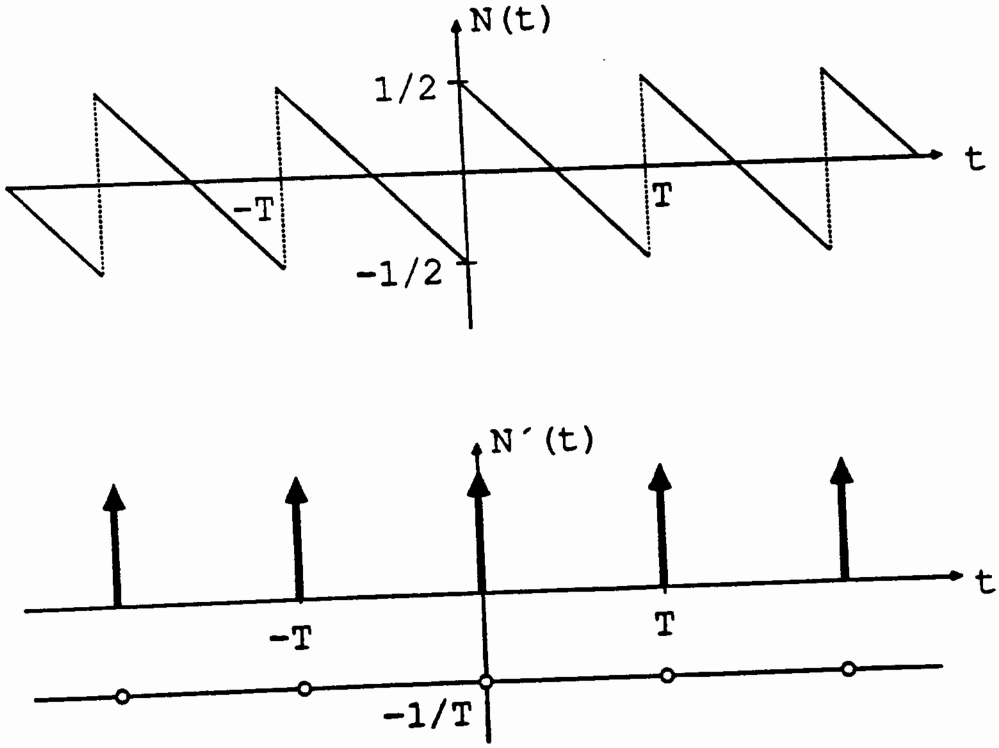
$$\begin{cases} \mathrm{N}(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{T}, & 0 < t < T, \\ \mathrm{N}(0) = 0. \end{cases}$$

Med variabelbytet $x = \Omega t$, där $\Omega T = 2\pi$, kan detta återföras på sats 1.10, och vi får

$$\mathrm{N}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\Omega t}{n\pi} \quad \text{för alla } t \in \mathbf{R}. \tag{5.25}$$

Detta är en vanlig fourierserie, punktvis konvergent för alla $t \in \mathbf{R}$. Vi skall derivera (5.25) i distributionsmening. Funktionen $\mathrm{N}(t)$ har språng uppåt av höjd 1 då $t = kT$, k heltal. Om vi generaliserar sats 5.3 till fallet med oändligt många språng finner vi att

$$\begin{aligned} \mathrm{N}'(t) &= -\frac{1}{T} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ &= -\frac{1}{T} + Ш(t) \quad \text{i } \mathcal{S}'. \end{aligned}$$



Enligt sats 5.10 får vi termvis derivera höger led i (5.25). Distributionsderivatan blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Omega}{n\pi} \cos n\Omega t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos n\Omega t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T}\left(e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}\right) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{im\Omega t}.$$

Likheten (5.25), deriverad i distributionsmening, ger alltså

$$-\frac{1}{T} + \text{Ш}(t) = \text{N}'(t) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{im\Omega t}. \tag{5.26}$$

Observera att vi har funnit fourierserien för Ш på ett nytt sätt:

$$\text{Ш}(t) = \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{im\Omega t} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Omega t}.$$

Om vi t ex deriverar ytterligare en gång finner vi att

$$\text{N}''(t) = \text{Ш}'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(t - kT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} im\Omega e^{im\Omega t}. \tag{5.27}$$

∎

Om en periodisk funktion på olika intervall sammanfaller med olika polynom, kan fourierkoefficienterna bestämmas *utan* någon explicit partialintegration.

Exempel. Bestäm fourierserien till den kontinuerliga funktionen

$$U(t) = \left(t - \frac{T}{2}\right)^2, \quad 0 \le t \le T,$$
$$U(t) = U(t + T), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösning. Vi betraktar U som distribution och skissar U, U' samt U'' över flera perioder. Vi ser att

$$U''(t) = 2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2T\delta(t - kT) = 2 - 2T\,\text{Ш}(t) \quad \text{i } \mathcal{S}'.$$

Som distribution har U en fourierserie

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \quad c_n = c_n(U),\ \Omega T = 2\pi,$$

som vi får derivera termvis. Detta ger, med likhet i $\mathcal{S}'$, att

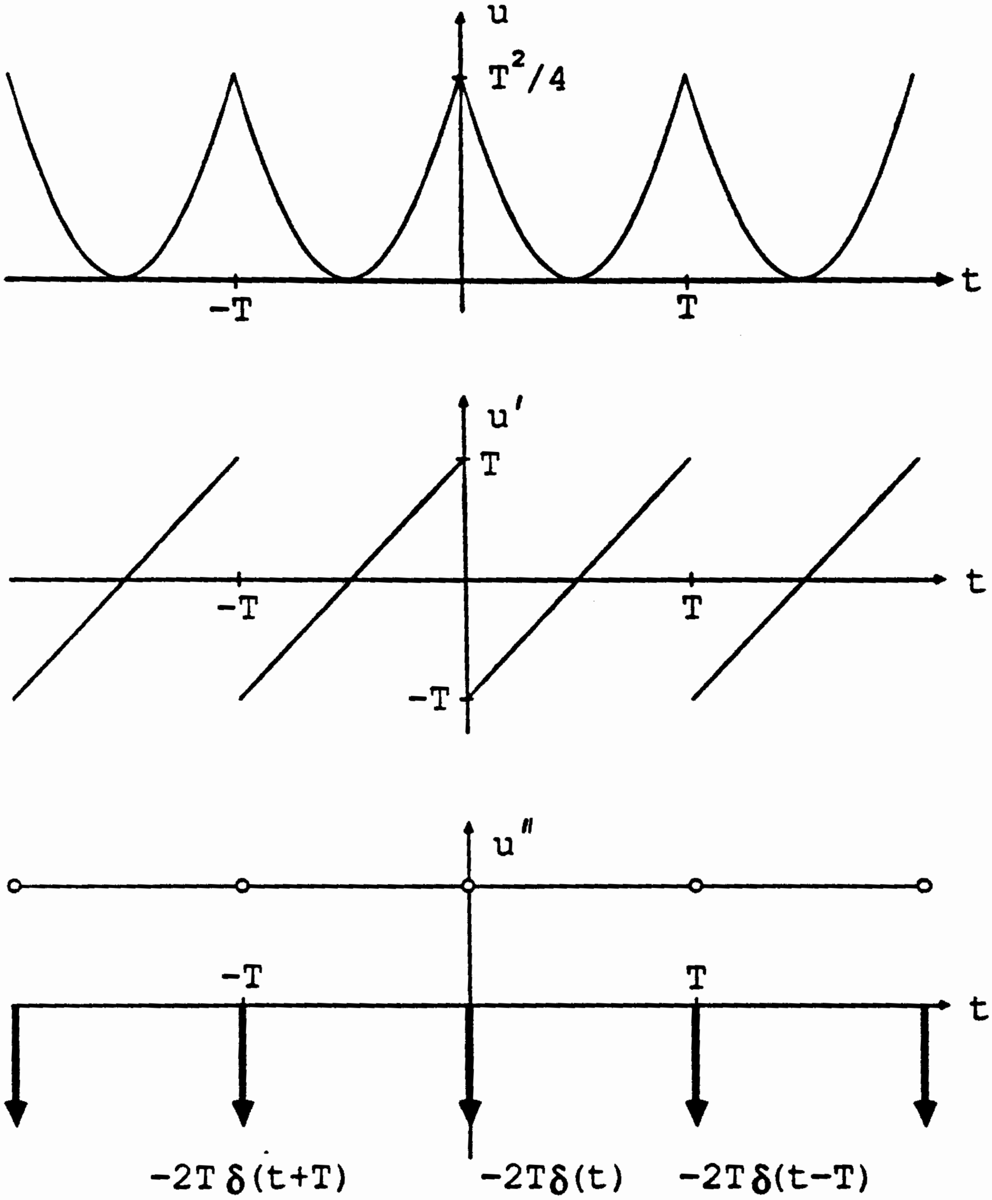
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (in\Omega)^2 c_n e^{in\Omega t} = U''(t) = 2 - 2T\,\text{Ш}(t) = -2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{in\Omega t},$$

där vi utnyttjat att $c_n(\text{Ш}) = 1/T$ för alla n. Vi identifierar koefficienterna termvis,

$$(in\Omega)^2 c_n(U) = \begin{cases} -2Tc_n(\text{Ш}) = -2, & n \neq 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

vilket ger

$$c_n(U) = \frac{-2}{(in\Omega)^2} = \frac{2}{(n\Omega)^2}, \quad n \neq 0.$$



För att bestämma c_0 måste vi gå tillbaka till den ursprungliga funktionen $U(T)$ och beräkna medelvärdet

$$c_0(U) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 dt = \frac{T^2}{12}.$$

Som distribution har U alltså fourierserien

$$U(t) = \frac{T^2}{12} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{(n\Omega)^2} e^{in\Omega t} = \frac{T^2}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{in\Omega t}}{n^2}\right).$$

Men fourierserien är absolutkonvergent och U en kontinuerlig funktion, så vi har även likhet punktvis i uttrycket ovan för alla $t \in \mathbb{R}$ enligt sats 1.4. ∎

Övning 18. Beräkna fourierserien till trekantvågen W på sidan 13 genom att fourierserieutveckla distributionsderivatan W''.

5.9 Fouriertransform av testfunktioner

Vi skall nu se att testfunktionerna i Schwartzklassen $\mathcal{S}$ har mycket goda egenskaper med avseende på fouriertransform. Dessa kommer sedan att överföras till distributionerna i klassen $\mathcal{S}'$.

En testfunktion φ är absolutintegrabel, $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, och därmed är dess fouriertransform

$$\mathfrak{F}[\varphi](\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(t)\,dt \tag{5.28}$$

definierad.

Exempel. Funktionen $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ har fouriertransformen $\widehat{\varphi}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$. Både φ och $\widehat{\varphi}$ är testfunktioner (jfr sats 5.13 nedan).

Det är uppenbart att räknereglerna 1–4 för fouriertransform i avsnitt 4.2 gäller. Vidare har vi följande deriveringsregler.

Sats 5.11. *Om φ tillhör Schwartzklassen $\mathcal{S}$ gäller*
(i) $\widehat{\varphi}$ är oändligt många gånger deriverbar, och för varje positivt heltal k är

$$D^k\widehat{\varphi}(\omega) = \mathfrak{F}\left[(-it)^k\varphi(t)\right](\omega).$$

(ii) För varje positivt heltal k är $D^k\varphi(t)$ absolutintegrabel och

$$\mathfrak{F}\left[D^k\varphi\right](\omega) = (i\omega)^k\,\widehat{\varphi}(\omega).$$

Bevis av (i). Vi betraktar först fallet $k = 1$. Eftersom $\varphi \in \mathcal{S}$ gäller

$$|\varphi(t)| \le \frac{C_4}{(1+|t|)^4}. \tag{5.29}$$

Bilda skillnaden

$$\begin{aligned}
R(h) &= \frac{\widehat{\varphi}(\omega+h) - \widehat{\varphi}(\omega)}{h} - \mathfrak{F}\left[(-it)\varphi(t)\right](\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}}{h} + ite^{-i\omega t}\right]\varphi(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(t)\cdot\frac{e^{-iht} - 1 + ith}{h}\,dt.
\end{aligned}$$

Vi utnyttjar nu olikheten

$$\left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha\right| \le \frac{\alpha^2}{2},$$

som följer av Taylors formel. Vi får med användande av (5.29)

$$\begin{aligned}
|R(h)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-i\omega t}\varphi(t)\right| \frac{|th|^2}{2h}\, dt \\
&\le \frac{|h|}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| \cdot t^2\, dt \\
&\le \frac{|h|}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_4 t^2}{(1+|t|)^4}\, dt = |h| \cdot \text{const} \to 0
\end{aligned}$$

då $h \to 0$ och påståendet följer. För $k = 1, 2, 3, \ldots$ följer sedan satsen genom upprepning av ovanstående förfarande. ∎

Bevis av (ii). Genom successiv partialintegration får vi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left[\varphi^{(k)}\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi^{(k)}(t)\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\left[\varphi^{(k-1)}(t)e^{-i\omega t}\right]_{-T}^{T} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi^{(k-1)}(t)\, dt \\
&= \cdots = (i\omega)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(t)\, dt = (i\omega)^k\widehat{\varphi}(\omega).
\end{aligned}$$

De utintegrerade termerna försvinner eftersom $\lim_{|t|\to\infty} \left|\varphi^{(k)}(t)\right| = 0$ för varje heltal k. ∎

Från sats 5.11 (ii) ser vi att då φ är en testfunktion gäller

$$\left|(i\omega)^k\widehat{\varphi}(\omega)\right| = \left|\mathfrak{F}\left[\varphi^{(k)}\right](\omega)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi^{(k)}(t)\right| dt < \infty$$

för $k = 0, 1, 2, \ldots$. Härav följer att

$$|\widehat{\varphi}(\omega)| \le \frac{C}{(1+|\omega|)^2}.$$

Därmed är $\widehat{\varphi}$ absolutintegrabel, och samtliga förutsättningar för Fouriers inversionsformel (sats 4.2) är uppfyllda. Vi får

Sats 5.12. *Då φ är en testfunktion gäller Fouriers inversionsformel*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{\varphi}(\omega)\, d\omega. \tag{5.30}$$

Genom successivt användande av sats 5.11 fås

$$(1+\omega^2)^N\widehat{\varphi}^{(k)}(\omega) = \mathfrak{F}\left[(1-D^2)^N(-it)^k\varphi(t)\right](\omega). \tag{5.31}$$

Vi har nu

Sats 5.13. *Om φ är en testfunktion är $\widehat{\varphi}$ också en testfunktion. Annorlunda uttryckt, fouriertransformen är en avbildning från klassen $\mathcal{S}$ till klassen $\mathcal{S}$,*

$$\mathfrak{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

Vidare är denna avbildning en-entydig och på.

Bevis. Att $\mathfrak{F}$ avbildar $\mathcal{S}$ in i $\mathcal{S}$ följer av formel (5.31). En-entydigheten är en konsekvens av Fouriers inversionsformel. Inversionsformeln visar också att avbildningen är på. ∎

Från formel (5.31) följer också

Sats 5.14. *Låt $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av testfunktioner. Om $\varphi_n \to \varphi$ i $\mathcal{S}$ där φ är en testfunktion gäller att $\widehat{\varphi}_n \to \widehat{\varphi}$ i $\mathcal{S}$.*

Bevisskiss. Det räcker att visa att om $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en nollföljd i $\mathcal{S}$, så är $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en nollföljd i $\mathcal{S}$. (Se avsnitt 5.2 för definitionen av konvergens i $\mathcal{S}$.) Att så är fallet följer av formel (5.31). Genomför detaljerna som övning.

Vi sammanfattar sats 5.13 och 5.14 sålunda:

Sats 5.15. *Fouriertransformen är en kontinuerlig en-entydig avbildning av $\mathcal{S}$ på $\mathcal{S}$,*

$$\mathfrak{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \quad \begin{cases} \text{en-entydig} \\ \text{på} \\ \text{kontinuerlig.} \end{cases}$$

Allt detta skall nu överföras till klassen $\mathcal{S}'$ av tempererade distributioner.

5.10 Fouriertransform av distributioner

Låt f vara en absolutintegrabel funktion, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dess fouriertransform

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

är då en kontinuerlig begränsad funktion. $\widehat{f}$ kan då enligt sats 5.2 uppfattas som en distribution. Dess verkan på en testfunktion φ ges av

$$< \widehat{f}, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega.$$

Genom att byta integrationsordning fås

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt \right) \varphi(\omega)\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(\omega)\, d\omega \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Fubinis sats, se avsnitt 4.5, är tillämplig eftersom den upprepade integralen är absolutkonvergent. Vi har erhållit *Parsevals formel:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt.$$

Observera nu att om φ är en testfunktion är också $\widehat{\varphi}$ en testfunktion (sats 5.13). Detta gör det möjligt att utvidga definitionen av fouriertransform till klassen av tempererade distributioner.

Definition. Låt $f(t)$ vara en tempererad distribution (ett element i $\mathcal{S}'$). Vi definierar dess fouriertransform $\widehat{f}(\omega)$, som den funktional vars verkan på en testfunktion $\varphi(\omega)$ ges av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt$$

eller

$$<\widehat{f},\varphi> \overset{\text{def}}{=} <f,\widehat{\varphi}>, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Funktionalen $\widehat{f}$:s verkan på testfunktionen φ ges således av distributionen f:s verkan på $\widehat{\varphi}$. Denna verkan är definierad eftersom enligt sats 5.13 $\widehat{\varphi}$ är en testfunktion. Vi skall nu se att $\widehat{f}$ är en tempererad distribution. Det återstår att verifiera att $\widehat{f}$ är en kontinuerlig funktional på $\mathcal{S}$. Låt $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en nollföljd i $\mathcal{S}$. Enligt sats 5.14 är då $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ en nollföljd i $\mathcal{S}$. Vi får

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi_n(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}_n(t)\,dt \to 0$$

då $n \to \infty$.

Vi sammanfattar ovanstående som

Sats 5.16. *Om $f(t)$ är en tempererad distribution är $\widehat{f}(\omega)$ en tempererad distribution. Annorlunda uttryckt, fouriertransformen är en avbildning från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{S}'$,*

$$\mathfrak{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'.$$

Exempel. Beräkna fouriertransformen av $f(t) = 1$.

Lösning. Låt φ vara en testfunktion. Definitionsmässigt gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t)\,dt.$$

Enligt Fouriers inversionsformel för testfunktioner gäller

$$2\pi\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{\varphi}(t)\,dt.$$

Speciellt är

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t)\,dt = 2\pi\varphi(0),$$

och vi får

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = 2\pi\varphi(0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Detta innebär, enligt definitionen av likhet för distributioner, att $\widehat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$. Vi har visat att

$$1 \xmapsto{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega).$$

∎

Sats 5.17. *Fouriers inversionsformel gäller för distributioner, d v s*

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi f(-t). \tag{5.32}$$

Bevis. Låt φ vara en testfunktion. Då gäller enligt Fouriers inversionsformel för testfunktioner att

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(t) = 2\pi\varphi(-t).$$

Vi får från definitionen av fouriertransform av distributioner att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\widehat{\varphi}}(t)\,dt$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(-t)\,dt = [\,t = -x\,]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-x)\varphi(x)\,dx, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S},$$

och resultatet följer av definitionen av likhet för distributioner. ∎

Sats 5.18. *Om $f_n \to f$ i $\mathcal{S}'$ då $n \to \infty$, så gäller att $\widehat{f}_n \to \widehat{f}$ i $\mathcal{S}'$ då $n \to \infty$.*

Bevis. Enligt definitionen av fouriertransform gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,\widehat{\varphi}(t)\,dt.$$

Eftersom $f_n \to f$ i $\mathcal{S}'$ är

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt.$$

Vidare är, återigen enligt definitionen av fouriertransform,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega.$$

Således är

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,\varphi(\omega)\,d\omega, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Detta är just innebörden av påståendet $\widehat{f}_n \to \widehat{f}$ i $\mathcal{S}'$. ∎

Sats 5.19. *Fouriertransformen är en en-entydig avbildning av $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{S}'$.*

Bevis. (i) Vi måste visa att avbildningen är på. Låt $g \in \mathcal{S}'$ vara given. Om vi då väljer

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(-t)$$

så gäller enligt Fouriers inversionsformel att

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\widehat{g}(-t)\right] = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{g}}(-\omega) = g(\omega).$$

Alltså finns ett $f \in \mathcal{S}'$ sådant att $\mathcal{F} f = g$.

(ii) Vi måste visa att avbildningen är en-entydig. Antag att $\mathcal{F} g = \mathcal{F} h$, där g och h tillhör $\mathcal{S}'$. Fouriertransformering av relationen $\widehat{g} = \widehat{h}$ ger $\widehat{\widehat{g}} = \widehat{\widehat{h}}$. Nu ger Fouriers inversionsformel att $2\pi g(-t) = 2\pi h(-t)$ varav $g = h$. ∎

Vi sammanfattar sats 5.16, 5.18 och 5.19 sålunda:

Sats 5.20. *Fouriertransformen är en kontinuerlig en–entydig avbildning av $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{S}'$,*

$$\mathcal{F} \;:\; \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}' \quad \begin{cases} \text{en-entydig} \\ \text{på} \\ \text{kontinuerlig.} \end{cases}$$

Exempel. Sats 5.18 har många tillämpningar. Vi ger två här.

(i) Låt $\varphi(x) = e^{-x^2/2}$ och

$$f_n(t) = \varphi\left(\frac{t}{n}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2\right\}, \quad n = 1,2,3,\dots .$$

Det gäller att $f_n(t) \to 1$ i $\mathcal{S}'$ då $n \to \infty$. Härav följer att

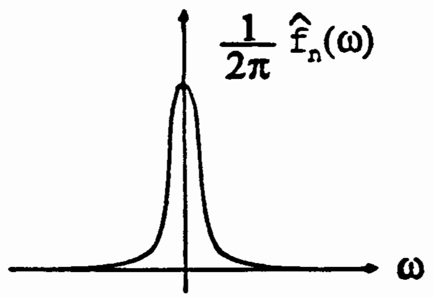
$$\mathcal{F}[f_n] \to \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta \quad \text{i } \mathcal{S}' \text{ då } n \to \infty.$$

Eftersom

$$\mathcal{F}[f_n](\omega) = \widehat{f}_n(\omega) = n\widehat{\varphi}(n\omega) = n\sqrt{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(n\omega)^2\right\}$$

kan vi bokföra att

$$\frac{1}{2\pi}\widehat{f}_n(\omega) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2\omega^2/2} \to \delta(\omega) \quad \text{i } \mathcal{S}' \text{ då } n \to \infty. \tag{5.33}$$



(ii) Om $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = f$ i $\mathcal{S}'$ så gäller att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n = \widehat{f}$ i $\mathcal{S}'$.
För att inse detta sätter vi $F_N = \sum_{n=-N}^{N} f_n$. Vi vet att $F_N \to f$ i $\mathcal{S}'$ och måste visa att $\widehat{F}_N \to f$ då $N \to \infty$, vilket just är innehållet i sats 5.14. ∎

För att beräkna fouriertransformen till en allmän tempererad distribution måste man falla tillbaka på definitionen ovan. Gäller det däremot en distribution med begränsat stöd (kompakt stöd), så kan fouriertransformen beräknas på vanligt sätt. Detta uppmuntrande besked ges av sats 5.21 nedan.

Anmärkning. Funktionen $g(t) = e^{-i\omega t}$, där ω är fixt, tillhör ej Schwartzklassen $\mathcal{S}$, eftersom den ej går mot noll då $|t|$ växer. *Trots det* gäller formel (5.34) nedan, där $g(t)$ spelar rollen av testfunktion.

Sats 5.21. *Låt f vara en distribution med kompakt stöd. Då kan fouriertransformen $\widehat{f}$ beräknas m h a den vanliga formeln*

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt. \tag{5.34}$$

Till yttermera visso är $\widehat{f}$ en måttligt växande funktion.

Beviset återfinns i appendix E.

Exempel.

a)

$$\widehat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}\,dt = \left[e^{-i\omega t}\right]_{t=0} = 1,$$

d v s

$$\mathcal{F} : \delta \longmapsto 1. \tag{5.35}$$

b) Om $f(t) = \delta(t-a)$ blir

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-i\omega t}\,dt = \left[e^{-i\omega t}\right]_{t=a} = e^{-ia\omega}.$$

c) Med $g(t) = \delta'(t)$ blir

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)e^{-i\omega t}\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\left(-i\omega e^{-i\omega t}\right)\,dt = i\omega.$$

d) Låt p vara ett polynom

$$p(s) = A + Bs + Cs^2$$

och

$$p\left(\frac{d}{dt}\right) = A + B\left(\frac{d}{dt}\right) + C\left(\frac{d}{dt}\right)^2$$

en operator. Distributionen

$$g(t) = p\left(\frac{d}{dt}\right)\delta(t-a) = A\delta(t-a) + B\delta'(t-a) + C\delta''(t-a)$$

har transformen

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [A\delta(t-a) + B\delta'(t-a) + C\delta''(t-a)]\,e^{-i\omega t}\,dt = \left[A + B(i\omega) + C(i\omega)^2\right]e^{-ia\omega},$$

vilket vi bokför som

$$\mathfrak{F} \;:\; p\left(\frac{d}{dt}\right)\delta(t-a) \longmapsto p(i\omega)e^{-ia\omega}. \tag{5.36}$$

Observera specialfallet

$$\mathfrak{F} \;:\; p\left(\frac{d}{dt}\right)\delta(t) \longmapsto p(i\omega). \tag{5.37}$$

∎

Dessa formler gäller för alla polynom p.

Exempel. Bestäm den distribution f vars fouriertransform är

$$\widehat{f}(\omega) = h(\omega) = A\delta(\omega - a) + B\delta'(\omega - a) + C\delta''(\omega - a).$$

Lösning. Enligt föregående exempel är

$$\widehat{h} = \left[A + B(ix) + C(ix)^2\right]e^{-iax},$$

och enligt sats 5.17 är

$$\widehat{h}(x) = \widehat{\widehat{f}}(x) = 2\pi f(-x).$$

Sålunda blir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(A - Bit - Ct^2\right)e^{iat}.$$

∎

Formeln

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{5.38}$$

gäller punktvis (d v s för *varje* fixt $\omega \in \mathbb{R}$) i fallen

a) f är en absolutintegrabel funktion, d v s

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty,$$

b) f är en distribution med kompakt stöd.

I vissa andra fall kan man rädda formel (5.38) punktvis genom att tolka integralen som en s k principalvärdesintegral (se avsnitt 5.14) och/eller som en betingat konvergent integral (t ex då $f(t) = 1/t$). I övriga fall har relationen (5.38) *ingen betydelse punktvis*! Däremot kan (5.38) *alltid* tolkas som en likhet i distributionsmening. Vi exemplifierar detta med ett exempel som i efterhand rättfärdigar det sätt varpå Fourier (1822) och Dirac (1930) själva handskades med deltafunktionen.

Exempel. Låt distributionen $g(\omega)$ ges av den i vanlig mening divergenta integralen

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(a-\omega)}\, dt. \tag{5.39}$$

Uttolka påståendet

$$g(\omega) = \delta(\omega - a) \quad \text{i } \mathcal{S}'. \tag{5.40}$$

Lösning. Vi måste låta båda led verka på en testfunktion $\varphi(\omega)$. Vi får först

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(a-\omega)}\, dt \right) \varphi(\omega)\, d\omega,$$

där vi helt sonika byter integrationsordning och sålunda *definierar* g medelst formeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(a-\omega)} \varphi(\omega)\, d\omega \right) dt, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Nu kan vi utvärdera den inre integralen och får

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ita} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \varphi(\omega)\, d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ita} \widehat{\varphi}(t)\, dt, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Tolkningen av (5.40) lyder

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - a)\varphi(\omega)\, d\omega, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S},$$

d v s

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}\widehat{\varphi}(t)\,dt = \varphi(a), \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.41}$$

Men detta är ju Fouriers inversionsformel för testfunktioner! Den är alltså *ekvivalent* med påståendet

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(a-\omega)}\,dt = \delta(\omega - a) \quad \text{i } \mathcal{S}'. \tag{5.42}$$

∎

På liknande sätt kan vi alltid tolka inversionsformeln

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

i distributionsmening:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi(t)\,dt\right)d\omega, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S},$$

d v s

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\widehat{\varphi}(-\omega)\,d\omega, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Tillvägagångssättet ovan illustrerar den allmänna filosofi, som ligger bakom distributionsteorin: Om en likhet inte kan visas punktvis, multiplicerar man helt enkelt båda led med en testfunktion, integrerar och byter härvid integrationsordning i eventuella dubbelintegraler, om det befrämjar saken.

Formel (5.42) kan emellertid tolkas på flera olika sätt.

Andra tolkningen. Vi byter samtidigt $a - \omega$ mot t och t mot ω i (5.42). Då får vi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega = \delta(-t) \quad \text{i } \mathcal{S}'.$$

Men distributionen δ är jämn, d v s $\delta(-t) = \delta(t)$, varav

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\omega = \delta(t) \quad \text{i } \mathcal{S}'. \tag{5.43}$$

En suggestiv tolkning av denna viktiga formel är följande. Distribuitionen $\delta(t)$ kan betraktas som en överlagring av de harmoniska svängningarna $h(t) = e^{i\omega t}$. För $t = 0$ ligger de alla i fas och förstärker varandra, men för $t \neq 0$ släcker de fullständigt ut varandra! ∎

Tredje tolkningen av (5.42). Vi byter ut ω och a mot x och y. Vi får

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-y)}\,dt = \delta(y-x) = \delta(x-y) \quad \text{i } \mathscr{S}'.$$

Vidare skriver vi $e_x(t) = e^{ixt}$ och $e_y(t) = e^{iyt}$, så att $e^{it(x-y)} = e_x(t)\overline{e_y(t)}$. Resultatet lyder

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e_x(t)\overline{e_y(t)}\,dt = \delta(x-y) \quad \text{i distributionsmening.} \tag{5.44}$$

En tolkning av detta är att funktionerna e_x och e_y är ortogonala då $x \neq y$, *trots* att ingen av dem tillhör rummet $L^2(\mathbb{R})$ av kvadratintegrabla funktioner på $\mathbb{R}$, eftersom

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e_x(t)\overline{e_x(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |e_x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\,dt = \infty.$$

Jämför formeln

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt = \delta_{nm}$$

från avsnitt 1.11. ∎

5.11 Räkneregler för fouriertransformer av distributioner

Samtliga räknelagar som gäller för fouriertransformer av testfunktioner kommer att gälla också för tempererade distributioner.

Sats 5.22. *Om f är en tempererad distribution gäller*

(i)	$af + bg \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} a\widehat{f} + b\widehat{g}$,	$a, b \in \mathbb{C}$	*(Linearitet)*
(ii)	$f(at) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \frac{1}{\lvert a\rvert}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$,	$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$	*(Tidsskalning)*
(iii)	$f(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} e^{-it_0\omega}\widehat{f}(\omega)$		*(Tidsförskjutning)*
(iv)	$e^{iat}f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \widehat{f}(\omega - a)$		*(Modulering)*
(v)	$D^k f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} (i\omega)^k\widehat{f}(\omega)$		*(Tidsderivering)*
(vi)	$t^k f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} i^k D^k\widehat{f}(\omega)$		*(Frekvensderivering).*

Vi påminner om att om $f \in \mathscr{S}'$ definieras $f(at+b)$ genom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at+b)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}\,dx.$$

Bevis. Vi bevisar (iv) och (v). Resten lämnas till läsaren.

(iv)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[e^{iat}f(t)\right](\omega)\varphi(\omega)\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}\left[\varphi(\omega+a)\right](t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\varphi(\omega+a)\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega-a)\varphi(\omega)\,d\omega.
\end{aligned}$$

och resultatet följer av definitionen av likhet för distributioner.

(v)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[D^k f(t)\right](\omega)\varphi(\omega)\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} D^k f(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt \\
&= (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(t)D^k\widehat{\varphi}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Nu är $\mathcal{F}\left[(-i\omega)^k\varphi(\omega)\right] = D^k\widehat{\varphi}(t)$ och vi får

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[D^k f(t)\right](\omega)\varphi(\omega)\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathcal{F}\left[(i\omega)^k\varphi(\omega)\right](t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)(i\omega)^k\varphi(\omega)\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^k\widehat{f}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega
\end{aligned}$$

Återigen ger definitionen av likhet för distributioner det sökta resultatet. ∎

Övning 19. Visa med hjälp av räknelagarna att

a) $\mathcal{F}\left[e^{iat}\right] = 2\pi\delta(\omega-a), \quad a \in \mathbb{R}.$

b) $\mathcal{F}\left[\delta^{(k)}(t)\right] = (i\omega)^k, \quad k = 1,2,\ldots.$

c) $\mathcal{F}\left[t^k\right] = 2\pi i^k\delta^{(k)}(\omega), \quad k = 1,2,\ldots.$

5.12 Faltning av distributioner

Faltningen $f * g$ brukar inte definieras för två godtyckliga distributioner f och g. Vi skall i detta avsnitt ta upp två fall då det går bra att definiera $f * g$.

Det första fallet föreligger då distributionerna f och g ges av vanliga funktioner, som kan faltas på vanligt sätt (avsnitt 4.4) enligt formeln

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-v)g(v)\,dv, \tag{5.45}$$

där variablerna u och v är relaterade genom sambandet $u + v = t$. I detta fall menar vi med faltningen av distributionerna f och g den distribution som ges av funktionen $f * g$ enligt (5.45).

Det andra fallet föreligger då en av distributionerna $\widehat{f}$ och $\widehat{g}$ är en måttligt växande funktion. För att motivera definitionen nedan drar vi oss till minnes sats 4.3, som säger att

$$\mathfrak{F}\ :\ f * g \longmapsto \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \tag{5.46}$$

om både f och g tillhör $L^1(\mathbb{R})$. Det är bl a denna formel som gör faltningen viktig. Låt oss utnyttja den för att definiera faltningen mellan två *distributioner* f och g. Om $\widehat{g}$ är en måttligt växande funktion och $\widehat{f}$ är en distribution, så är produkten $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$ väldefinierad enligt avsnitt 5.5.

Definition. Låt f och g vara tempererade distributioner och minst en av $\widehat{f}$ och $\widehat{g}$ en måttligt växande funktion. Då definieras distributionen $h = f * g$ av sambandet

$$\widehat{h} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}. \tag{5.47}$$

Denna formel kan också skrivas

$$f * g = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\mathfrak{F}[f] \cdot \mathfrak{F}[g]\right\}. \tag{5.48}$$

Observera att faltning enligt denna definition är en kommutativ operation ($f * g = g * f$), eftersom vanlig multiplikation är kommutativ ($\widehat{f} \cdot \widehat{g} = \widehat{g} \cdot \widehat{f}$).

Exempel. Om distributionen g har kompakt stöd, så är $\widehat{g}$ en måttligt växande funktion enligt sats 5.21. Därför är faltningen mellan två distributioner *alltid* definierad så fort en av dem har kompakt stöd.

Exempel. Vi låter $g = \delta$ (har kompakt stöd) med $\widehat{g} = 1$ (en måttligt växande funktion). Då blir

$$\widehat{h} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} = \widehat{f} \cdot 1 = \widehat{f} \quad \text{och } h = f.$$

Vi bokför att

$$f * \delta = \delta * f = f \quad \text{för alla } f \in \mathcal{S}'. \tag{5.49}$$

Distributionen δ tjänstgör alltså som enhet under faltning.

Anmärkning. Om det råkar sig så, att faltningen $f * g$ går att definiera både enligt (5.45) och (5.48), så överensstämmer de båda definitionerna.

Det går emellertid ofta att falta distributioner utan att använda fouriertransform. Speciellt enkelt blir det när ena faktorn är en testfunktion.

Sats 5.23. *Låt f vara en tempererad distribution och ψ en testfunktion. Då gäller följande:*

(i) *För varje $t \in \mathbb{R}$ kan vi bilda*

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi(t-u)\,du. \tag{5.50}$$

(ii) *Distributionen $f * \psi$ ges av funktionen h.*

(iii) *Denna funktion $h = f * \psi$ besitter oändligt många kontinuerliga derivator.*

(iv) *Om dessutom f har kompakt stöd, så blir $h = f * \psi$ en testfunktion.*

Bevisskiss. (i) För varje fixt t är funktionen $u \longmapsto \psi(t-u)$ en testfunktion, så f:s verkan på denna funktion är definierad.

(ii) Det gäller att visa att (5.50) står i samklang med (5.48), d v s att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi(t-u)\,du\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{f}(x)\widehat{\psi}(x)]\varphi(x)\,dx, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Detta är en formell övning som vi hoppar över. Delarna (iii) och (iv) avstår vi helt från att här bevisa. ∎

Vi skall i sats 5.24 nedan beskriva en ganska allmän situation då faltningen mellan två "riktiga" distributioner kan definieras utan fouriertransform. För detta behöver vi kunna tolka (5.45) i distributionsmening. Distributionen $f*g$ blir definierad om vi kan ge betydelse åt uttrycket

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\varphi(t)\,dt$$

för alla $\varphi \in \mathcal{S}$. Först behöver vi ett

Lemma. *Om f och g ligger i $L^1(\mathbb{R})$ och φ är en testfunktion, så gäller att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\Psi(u)\,du, \tag{5.51 a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\chi(v)\,dv \tag{5.51 b}$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v)\varphi(u+v)\,du\,dv, \tag{5.51 c}$$

där

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\varphi(u+v)\,dv$$

och

$$\chi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-v)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi(u+v)\,dv.$$

∎

Bevis. Använd Fubinis sats (avsnitt 4.5).

Om f och g är distributioner, blir Ψ och χ oändligt deriverbara funktioner enligt sats 5.23 (iii). Riktigt användbar i formel (5.51 a) blir Ψ om den råkar vara en testfunktion.

Sats 5.24. *Låt f och $g \in \mathcal{S}'$. Antag att funktionen*

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\varphi(u+v)\,dv$$

är en testfunktion för varje val av testfunktion φ. Då gäller följande:

(i) Distributionen $\widehat{g}$ är en måttligt växande funktion, så faltningen $f * g$ blir väldefinierad enligt (5.48).

(ii) För $h = f * g$ gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\Psi(u)\,du \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.52}$$

Beviset utelämnas.

Anmärkning. Motsvarande gäller, *mutatis mutandis*, för χ och $\widehat{f}$.

Exempel. Villkoret i sats 5.24 är säkert uppfyllt om distributionen g har kompakt stöd, för då blir Ψ verkligen en testfunktion enligt sats 5.23 (iv).

Räkneregler för faltning av distributioner.

1) $f * g = g * f$
2) $f * (g + h) = f * g + f * h$
3) $D(f * g) = (Df) * g = f * (Dg)$
4) Mer allmänt för polynom P,
   $P(D)(f * g) = (P(D)f) * g = f * (P(D)g)$
5) $f * (g * h) = (f * g) * h$,
under förutsättning att minst två av de tre distributionerna $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ och $\widehat{h}$ är måttligt växande funktioner. Detta är t ex uppfyllt om två av de tre distributionerna f, g och h har kompakt stöd.
6) $\mathcal{F} : f * g \longmapsto \widehat{f} \cdot \widehat{g}$
7) $\mathcal{F} : f \cdot g \longmapsto \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$

Allmänt gäller att *alla* i en formel ingående led måste vara väldefinierade, för att formeln skall få användas.

Exempel. Låt $f = \delta - \delta''$ och $g(t) = e^{-|t|}/2$. Beräkna $h = f * g$ enligt olika metoder och jämför.

Lösning. Distributionen f har stöd i origo; både $\widehat{f}$ och $\widehat{g}$ är måttligt växande funktioner. Därför borde alla metoder fungera.

a) Vi använder definitionen.

$$\widehat{f}(\omega) = 1 - (i\omega)^2 = 1 + \omega^2, \quad \widehat{g}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}, \quad \widehat{h} = \widehat{f} \cdot \widehat{g} = 1, \quad h = \delta.$$

b) Vi prövar (5.52).

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\varphi(u+v)\,dv = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|}\varphi(u+v)\,dv.$$

Är Ψ en testfunktion?

c) Vi provar med χ i stället för Ψ.

$$\chi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi(u+v)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(u) - \delta''(u)]\varphi(u+v)\,du$$
$$= \varphi(v) - \varphi''(v) \in \mathcal{S};$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\chi(v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)[\varphi(v) - \varphi''(v)]\,dv$$
$$= [\text{partialintegration}] = \ldots = \varphi(0), \quad \text{varav } h = \delta.$$

d) Räkneregel 4) ger

$$h = f * g = (\delta - \delta'') * g = \{(1 - D^2)\delta * g\} = (1 - D^2)\{\delta * g\} = (1 - D^2)g.$$

Medelst sats 5.3 finner man att

$$Dg(t) = -\frac{1}{2}(\operatorname{sgn} t)e^{-|t|},$$
$$D^2 g(t) = -\delta(t) + \frac{1}{2}e^{-|t|},$$

varav $h = g - D^2 g = \delta$.

e) Anmärkning. Eftersom δ är enheten under faltning, kan man säga att f och g är varandras inverser under faltning. ∎

Exempel. Låt $f(t) = \dfrac{1}{\pi t}$ **och**

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Beräkna $h = f * g$.

Lösning. Enligt formelsamling är $\widehat{f}(\omega) = (-i)\text{sgn}\ \omega$ och $\widehat{g}(\omega) = \pi J_0(\omega)$. Den senare är måttligt växande. Vi får $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega) = -i\pi(\text{sgn}\ \omega)J_0(\omega)$, varav

$$h(t) = \begin{cases} 0, & |t| \le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}, & |t| > 1. \end{cases}$$

∎

Anmärkning. Med detta val av f brukar h kallas Hilberttransformen av g.

Exempel. Faltningen $1 * 1$ skulle bli ∞ överallt om vi försökte definiera den. På fouriersidan skulle den motsvara $\delta \cdot \delta$, som också är odefinierad!

Exempel. Beräkna $H * H$.

Lösning. Här duger (5.45) som för $t \le 0$ ger $(H * H)(t) = 0$. För $t > 0$ får vi

$$(H * H)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-v)H(v)\,dv = \int_0^t 1\,dv = t.$$

Resultatet lyder

$$(H * H)(t) = tH(t). \tag{5.53}$$

∎

Att härleda denna formel medelst fouriertransform går utöver denna kurs.

Exempel. Beräkna $f * \delta^{(k)}$, där $k \ge 0$ är ett heltal.

Lösning. Regel 4) ger

$$f * \delta^{(k)} = f * (D^k\delta) = D^k(f * \delta) = D^k f.$$

Vi bokför

$$f * \delta' = \delta' * f = f'$$
$$f * \delta'' = \delta'' * f = f''$$

och allmänt att

$$f * [P(D)\delta] = [P(D)\delta] * f = P(D)f.$$

∎

Exempel. Beräkna $h = f * g$, om $g(t) = \delta(t-a)$.

Lösning. Vi bildar enligt (5.51 a)

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)\varphi(u+v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v-a)\varphi(u+v)\,dv = \varphi(u+a),$$

som är en ny testfunktion. Därför ges h av att

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi(u+a)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\varphi(t)\,dt,$$

d v s $h(t) = f(t-a)$. Vi har härlett regeln

$$f(t) * \delta(t-a) = f(t-a), \quad f \in \mathcal{S}'. \tag{5.54}$$

∎

Övning 20. Visa att

$$H * (\delta' * 1) = 0$$
$$(H * \delta') * 1 = 1.$$

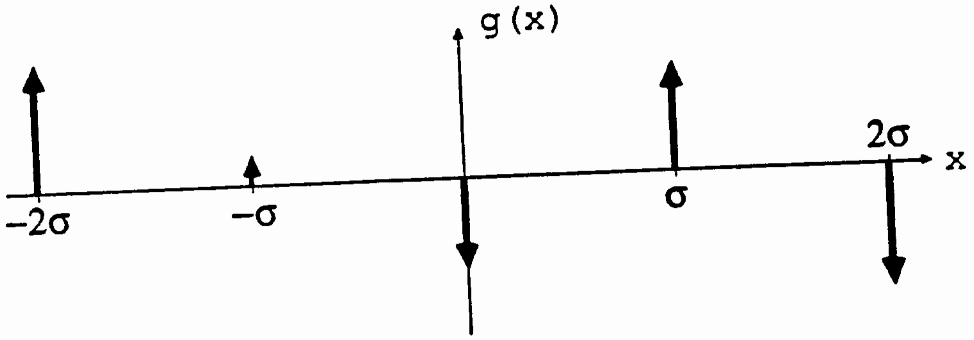
5.13 Fouriertransform av periodiska distributioner

En periodisk distribution kan både fourierserieutvecklas och fouriertransformeras. Det visar sig att fourierserien och fouriertransformen innehåller samma information, uttryckt på olika sätt. För att kunna formulera detta behöver vi termen pulståg.

Definition. Med ett *pulståg* menar vi här en distribution

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \delta(x - n\sigma), \tag{5.55}$$

där $\sigma > 0$ kallas *steglängden*.



Serien (5.55) konvergerar i $\mathcal{S}'$ om koefficienterna γ_n växer högst polynomiellt, d v s om det finns ett polynom p sådant att $|\gamma_n| \le |p(n)|$ för alla n. (se sats 5.25 (ii)).

Observera att distributionen g blir periodisk med period $N\sigma$ *om och endast om* koefficienträckan $\{\gamma_n\}$ är periodisk med period N, d v s om $\gamma_n = \gamma_{n+N}$ för alla heltal n.

Sats 5.25.
(i) ***Fouriertransformen av en periodisk distribution är ett pulståg.*** ***Om distributionen*** f ***har period*** T *och* $\Omega T = 2\pi$, *kan dess fouriertransform skrivas*

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \delta(\omega - n\Omega), \tag{5.56}$$

där koefficienterna γ_n växer högst polynomiellt, d v s

$$\gamma_n = O(|n|^k) \quad \text{för något heltal } k \text{ då } |n| \to \infty. \tag{5.57}$$

(ii) Omvänt gäller att ett pulståg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \delta(\omega - n\Omega) \tag{5.58}$$

är konvergent i $\mathcal{S}'$ (d v s definierar en tempererad distribution), om och endast om (5.57) gäller. I så fall är pulståget (5.58) fouriertransformen av en periodisk distribution.

Bevis.
(i) En T–periodisk distribution f kan utvecklas i en generaliserad fourierserie enligt sats 5.9,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} \quad \text{i } \mathcal{S}'.$$

Fourierserien konvergerar i $\mathcal{S}'$ och får därför fouriertransformeras termvis enligt sats 5.18, vilket ger att

$$\hat{f}(\omega) = \mathfrak{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathfrak{F}\left[e^{in\Omega t}\right]$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\Omega).$$

Således är $\gamma_n = 2\pi c_n$, och vi vet också från sats 5.9 att koefficienterna c_n växer högst polynomiellt.
(ii) Att serien (5.58) definierar en tempererad distribution betyder att serien

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \delta(\omega - n\Omega)\right) \varphi(\omega)\, d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)\varphi(\omega)\, d\omega$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \varphi(n\Omega) \tag{5.59}$$

skall vara konvergent i vanlig mening för alla testfunktioner φ.

a) Om $|\gamma_n|$ växer högst polynomiellt konvergerar (5.59), eftersom en testfunktion är snabbt avtagande.

b) Om tillväxten hos $|\gamma_n|$ ej begränsas av något polynom, kan man konstruera en speciell testfunktion φ sådan att $\sum \gamma_n \varphi(n\Omega) = \infty$.

Om slutligen (5.57) gäller, så är (5.58) fouriertransformen av den periodiska distributionen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{2\pi} e^{in\Omega t}. \qquad \blacksquare$$

För en periodisk distribution gäller således att fouriertransformen beräknas genom att man *först* fourierserieutvecklar och *sedan* fouriertransformerar:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\Omega) = \widehat{f}(\omega). \tag{5.60}$$

En fourierserie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$$

"innehåller" *bara* frekvenser $\omega = n\Omega$, som är multipler av en viss basfrekvens Ω. Därför är det inte så konstigt att fouriertransformen $\widehat{f}(\omega)$ har stöd just på mängden $\{n\Omega;\ n \text{ heltal}\}$.

Exempel. Fouriertransformen av (jfr exemplet på sidan 105)

$$\mathrm{III}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t + mT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}$$

är

$$\widehat{\mathrm{III}}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imT\omega} = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega),$$

där vi transformerat varje serie termvis och $\Omega T = 2\pi$. För att kunna skilja pulstågen från varandra skriver vi

$$\mathrm{III}(t) = \mathrm{III}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

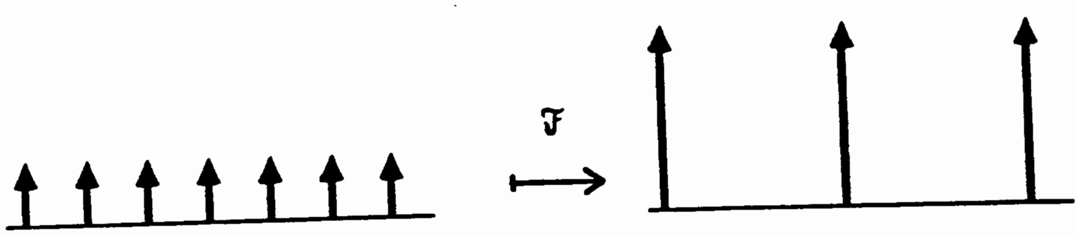
och

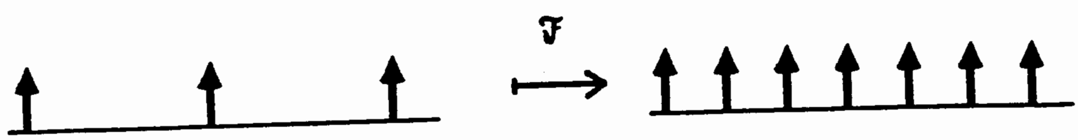
$$\mathrm{III}_\Omega(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega).$$

Med dessa beteckningar gäller

$$\mathcal{F}\ :\ \mathrm{III}_T \longmapsto \Omega \mathrm{III}_\Omega. \tag{5.61}$$

Ju kortare perioden T är, desto glesare ligger pulserna på fouriersidan, och vice versa.





Exempel. Poissons summationsformel. Tolka (5.61) medelst testfunktioner.

Lösning. Formel (5.61) säger att

$$(\text{Ш}_T)\hat{} = \Omega\text{Ш}_\Omega \quad \text{i } \mathcal{S}',$$

och detta betyder enligt definitionen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega\text{Ш}_\Omega(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ш}_T(t)\widehat{\varphi}(t)\,dt, \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S},$$

d v s

$$\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(kT) \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.62}$$

Denna identitet kallas Poissons summationsformel och har många tillämpningar bl a inom numerisk analys och talteori. Om T och Ω byter plats fås varianten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k\Omega). \tag{5.62$'$}$$

Denna formel har vi i praktiken redan härlett: I sats 5.8 visade vi att

$$c_n(\Phi) = \frac{1}{T}\widehat{\varphi}(n\Omega)$$

under förutsättning att

$$\Phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t+kT)$$

och $\varphi \in \mathcal{S}$. Vi skriver ut fourierserien för Φ,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(t+kT) = \Phi(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n\Omega)e^{in\Omega t}, \tag{5.63}$$

och ser att specialfallet $t = 0$ ger oss Poissons summationsformel (5.62′). ∎

Övning 21. Sök fouriertransformen till följande distributioner

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n\delta(t-n\sigma)$ b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n\delta'(t-n\sigma)$

c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n\delta''(t-n\sigma)$

där $\gamma_n = O(|n|^k)$ då $|n| \to \infty$ för något $k > 0$.

Vi visar nu följande generalisering av sats 5.8.

Sats 5.26. *Antag att den T-periodiska distributionen f kan skrivas på formen*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT), \tag{5.64}$$

där g är en distribution, vars fouriertransform $\widehat{g}$ är en måttligt växande funktion. Då kan fourierkoefficienterna för f beräknas enligt formeln

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\widehat{g}(n\Omega). \tag{5.65}$$

Anmärkning. Villkoren är säkert uppfyllda, ifall g är en distribution med kompakt stöd.

Bevis. Vi räknar med

$$Ш(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

och bildar

$$\begin{aligned}(Ш * g)(t) &= \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right\} * \{g(t)\} \\ &= [\text{tillåtet om } \widehat{g} \text{ är måttligt växande}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) * g(t) = [\text{enligt (5.54)}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT) = f(t).\end{aligned}$$

Härav följer att

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega) \cdot \widehat{Ш}(\omega) &= \widehat{g}(\omega)\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) \\ &= \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega)\delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n\Omega)\delta(\omega - n\Omega).\end{aligned}$$

Men enligt sats 5.25 är

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\delta(\omega - n\Omega),$$

varför

$$2\pi c_n(f) = \Omega\widehat{g}(n\Omega) = \frac{2\pi}{T}\widehat{g}(n\Omega).$$

■

Exempel. En tempererad distribution g har fouriertransformen

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{(\omega^2 - 2)(\omega^2 - 4)}{(\omega^2 + 2)(\omega^2 + 4)}.$$

Bestäm fourierserien för

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - 2\pi k).$$

Lösning. Vi ser att $\widehat{g}$ är måttligt växande. Nu ger sats 5.26 med $T = 2\pi$ och $\Omega = 1$ att

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(n).$$

Fourierserien blir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(n^2-2)(n^2-4)}{(n^2+2)(n^2+4)}e^{int} \quad \text{i } \mathcal{S}'.$$

Observera att det konkreta uttrycket för g fås via partialbråksuppdelningen

$$\widehat{g}(\omega) = 1 + \frac{12}{\omega^2+2} - \frac{24}{\omega^2+4},$$

som direkt ger att

$$g(t) = \delta(t) + 3\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}|t|} - 6e^{-2|t|}.$$

∎

Periodiskt pulståg. Om följden $\{\beta_m\}$ är periodisk, d v s $\beta_{m+N} = \beta_m$ för alla m, kallar vi distributionen g nedan för ett periodiskt pulståg. Vi skriver ut tåget och dess fourierserie,

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta_m\delta(t-m\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\Omega t}.$$

Tåget har steglängd α och period $T = N\alpha$. Här är $\Omega T = 2\pi$. Vi fouriertransformerar termvis och finner att pulståget

$$\widehat{g}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\beta_m e^{-im\alpha\omega} = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\Omega)$$

har steglängd $\Omega = 2\pi/(N\alpha)$ och period $N\Omega = 2\pi/\alpha$. Följden $\{c_n\}$ blir *också* periodisk med period N. Sambanden mellan fourierkoefficienterna c_n och β_m ges av den *ändliga fouriertransformen*

$$c_n = \frac{1}{T}\sum_{m=1}^{N}\beta_m e^{-imn2\pi/N}$$

med inversionsformeln

$$\beta_m = \frac{T}{N}\sum_{n=1}^{N}c_n e^{imn2\pi/N}.$$

5.14 Något om negativa potenser

Funktionen $\ln|t|$ är lokalt integrerbar och den har därför derivata i distributionsmening. Låt oss beteckna dess distributionsderivata med $g_1(t) = D\ln|t|$. Hur skall denna tolkas? Låt $\varphi(t)$ vara en testfunktion. Vi får

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\varphi(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{\infty}\ln|t|\,\varphi'(t)\,dt \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\int_{|t|\geq\epsilon}\ln|t|\,\varphi'(t)\,dt\right),\end{aligned}$$

där ε avtar mot noll. För $\varepsilon > 0$ gäller för denna integral

$$-\int_{|t|\geq\varepsilon} \ln|t|\,\varphi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(t)\ln(-t)\,dt - \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi'(t)\ln t\,dt$$
$$= -\left[\varphi(t)\ln(-t)\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[\varphi(t)\ln t\right]_{\varepsilon}^{\infty} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$
$$= \left[\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\right]\ln\varepsilon + \int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

Men $\varphi(\pm\varepsilon) = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ då $\varepsilon \to 0$ och därmed gäller att

$$(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)\ln\varepsilon \to 0 \quad \text{då } \varepsilon \to 0.$$

Vi får således

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\varphi(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt. \tag{5.66}$$

Gränsvärdet till höger kallas *Cauchys principalvärde* av (den odefinierade) integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)/t\,dt$. Man skriver

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt. \tag{5.67}$$

Distributionen $D\ln|t|$ brukar därför ofta betecknas $p.v.\left[\frac{1}{t}\right]$.

Om $f(t) = p.v.\left[\frac{1}{t}\right]$ ser man med hjälp av (5.66) att $tf(t) = 1$. Distributionen $f(t) = p.v.\left[\frac{1}{t}\right]$ löser således ekvationen

$$tf(t) = 1, \tag{5.68}$$

men det är ej den enda distributionslösningen till (5.68). Man ser att distributionen

$$f(t) = p.v.\left[\frac{1}{t}\right] + A\delta(t) \tag{5.69}$$

löser ekvation (5.68) för varje A.

Analogt kan man definiera högre distributionsderivator

$$g_k(t) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}D^k\ln|t|, \quad k = 1,2,3,\ldots.$$

Man kan visa att g_k löser ekvationen

$$t^k g_k(t) = 1$$

för varje heltal $k \geq 1$. Det finns också uttryck analoga med (5.66) som beskriver g_k:s verkan på testfunktioner.

Exempel. En ingående studie av distributionen

$$g_2(t) = -D^2 \ln|t| = -D\left\{p.v.\left[\frac{1}{t}\right]\right\},$$

som brukar kallas $1/t^2$ rätt och slätt, ger vid handen att

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\varphi(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t^2}\,dt \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}. \tag{5.70}$$

Av denna formel förstår man att man måste vara varsam när man handskas med negativa potenser.

Anmärkning. När det i formler eller formelsamling står $1/t^k$, avses alltid distributionen $g_k(t)$. Sålunda skriver man ofta $\frac{1}{t}$ i stället för $p.v.\left[\frac{1}{t}\right]$.

För att kunna beräkna $\widehat{\operatorname{sgn}}$ nedan behöver vi en definition och en sats.

Definition. En distribution $g(t)$ kallas *jämn* om $g(t) = g(-t)$, vilket betyder att

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(-t)\varphi(t)\,dt = [t=-x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(-x)\,dx \quad \text{för varje } \varphi\in\mathcal{S}.$$

En distribution $u(t)$ kallas *udda* om $u(-t) = -u(t)$, vilket betyder att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [-u(-t)]\,\varphi(t)\,dt = [t=-x] = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(-x)\,dx \quad \text{för varje } \varphi\in\mathcal{S}.$$

Exempel.

a) Jämna distributioner är $\delta(t)$, $\delta''(t)$, $\ln|t|$, $g_2(t) = -D^2\ln|t|$, 1, $|t|$, t^2.

b) Udda distributioner är $\delta'(t)$, $\delta'''(t)$, $g_1(t) = D\ln|t| = p.v.\left[\frac{1}{t}\right]$, $\operatorname{sgn} t$, t.

Sats 5.27. *För tempererade distributioner g och u gäller*

(i) g jämn $\Longrightarrow$ Dg udda

(ii) u udda $\Longrightarrow$ Du jämn

(iii) g jämn $\Longrightarrow$ $\widehat{g}$ jämn

(iv) u udda $\Longrightarrow$ $\widehat{u}$ udda.

Beviset är en formell övning som bygger på att motsvarande gäller för testfunktioner. Men för testfunktioner kan (i)-(iv) verifieras direkt genom räkning. ∎

Exempel. Bestäm fouriertransformen till

a) $\operatorname{sgn}(t)$

b) $H(t)$.

Lösning.

a) Låt $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ varav $f'(t) = 2\delta(t)$. Då denna relation fouriertransformeras fås ekvationen

$$i\omega\widehat{f}(\omega) = 2,$$

som löses av distributionen

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{i} p.v. \left[\frac{1}{\omega}\right] + A\delta(\omega).$$

Av sats 5.28 nedan följer att detta är den allmänna lösningen. Nu är emellertid distributionen $f(t) = \operatorname{sgn} t$ udda och dess fouriertransform därför också udda enligt sats 5.27 (iv). Därav följer att $A = 0$ vilket medför att

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{i} p.v. \left[\frac{1}{\omega}\right].$$

Man skriver ofta denna distribution som $2/i\omega$.

b) Skriv $H(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t))$. Då blir

$$\widehat{H}(\omega) = \frac{1}{2}(2\pi\delta(\omega) + \widehat{\operatorname{sgn}}\ \omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}.$$

Exempel. Visa att

$$\frac{1}{i\omega + 0} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \tag{5.71}$$

där $1/(i\omega + 0)$ definieras som gränsvärdet i $\mathcal{S}'$ av $S_\varepsilon(\omega) = 1/(i\omega + \varepsilon)$ då $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$.

Lösning 1. (medelst fouriertransform) Funktionen S_ε är fouriertransformen av funktionen H_ε, där

$$H_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t} H(t).$$

Eftersom $\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(t) = H(t)$ i $\mathcal{S}'$, gäller enligt sats 5.18 att

$$\frac{1}{i\omega + 0} = \lim_{\varepsilon\to 0} S_\varepsilon(\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{H}_\varepsilon(\omega) = \widehat{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Lösning 2. (direkt) Vi låter funktionen

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{\varepsilon + i\omega} = \frac{\varepsilon - i\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2} - \frac{i\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

verka på en testfunktion $\varphi(\omega)$ och finner att

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega = J - iK,$$

där

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^2}\varphi(\omega)\, d\omega$$

och

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2}\varphi(\omega)\, \omega.$$

Ett variabelbyte ger

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\varphi(\varepsilon x)\,dx,$$

vilket går mot

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\varphi(0)\,dx = \pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega$$

då $\varepsilon \to 0$. För att beräkna den andra integralen partialintegrerar vi och får

$$K = \left[\frac{1}{2}\log(\omega^2+\varepsilon^2)\varphi(\omega)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\log(\omega^2+\varepsilon^2)\varphi'(\omega)\,d\omega$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \log\sqrt{\omega^2+\varepsilon^2}\,\varphi'(\omega)\,d\omega,$$

vilket går mot

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \log|\omega|\,\varphi'(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (D\log|\omega|)\,\varphi(\omega)\,d\omega,$$

då $\varepsilon \to 0$. Detta visar att

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\omega}{\varepsilon^2+\omega^2} = D\log|\omega| = p.v.\left[\frac{1}{\omega}\right] \quad \text{i } \mathcal{S}'.$$

Sålunda är

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\pi\delta(\omega) - iD\log|\omega|\Big]\varphi(\omega)\,d\omega$$

för alla testfunktioner φ, vilket innebär att

$$\frac{1}{i\omega+0} = \lim_{\varepsilon\to 0} S_\varepsilon(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \quad \text{i } \mathcal{S}'.$$ ∎

5.15 Tillämpningar på differentialekvationer

Fouriertransformation är en viktig lösningsmetod för differentialekvationer. Vår utgångspunkt är följande utsaga, som svarar mot differentialkalkylens fundamentalsats.

Sats 5.28. *Låt f och g vara tempererade distributioner. Då gäller i distributionsmening*

(i) $\quad f'(t) = 0$ *om och endast om f är konstant.*

(ii) $\quad xg(x) = 0$ *om och endast om $g(x) = B\delta(x)$ för någon konstant B.*

Bevis. Påståendena (i) och (ii) är varandras fouriertransformer. Det räcker därför att visa (i).

Antag först att $f'(t) = 0$ i distributionsmening. Vi vill visa att $f(t) =$ en konstant A. Hur skall vi finna talet A? Jo, genom att låta f verka på en lämplig testfunktion Ψ. Fixera därför den sympatiska testfunktionen

$$\Psi(t) = e^{-\pi t^2},$$

som har totalmassa 1, d v s

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = 1,$$

och *definiera* talet A såsom verkan av f på denna speciella testfunktion,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f\Psi\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\pi t^2}\,dt.$$

För en godtycklig testfunktion φ inför vi den tillfälliga beteckningen

$$C = C_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt.$$

Vi vill nu visa att det för varje $\varphi \in \mathcal{S}$ gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A\varphi(t)\,dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt\right)\cdot A$$

$$= C_\varphi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)\,dt,$$

d v s att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\varphi(t) - C_\varphi \Psi(t)\right]\,dt = 0.$$

Men testfunktionen $\varphi(t) - C\Psi(t)$ har totalintegral noll, ty

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(t) - C\Psi(t)\right]\,dt = C - C = 0.$$

Om vi bildar dess primitiva funktion

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi(t) - C\Psi(t)\right]\,dt$$

med

$$\Phi'(t) = \varphi(t) - C\Psi(t),$$

gäller därför att $\Phi(-\infty) = \Phi(\infty) = 0$. Funktionen Φ är då en testfunktion, och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\Phi(t)\,dt = 0,$$

eftersom vi antog att $f'(t) = 0$ i $\mathcal{S}'$. Alltså är

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\Phi'(t) + C\Psi(t)]\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Phi'(t)\,dt + C\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t)\,dt \\ &= 0 + CA = A\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S},\end{aligned}$$

vilket innebär att $f(t) = A$ i distributionsmening.

Antag omvänt att $f(t) =$ en konstant A. Då gäller för distributionsderivatan $f'(t)$ att

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} A\varphi'(t)\,dt \\ &= A[\varphi(-\infty) - \varphi(\infty)] = 0 \quad \text{för varje } \varphi \in \mathcal{S},\end{aligned}$$

d v s $f'(t) = 0$ i distributionsmening. ∎

Mer allmänt gäller

Sats 5.29. *Antag att f och g är tempererade distributioner och låt m vara ett positivt heltal. Då gäller*

(i) $$D^m f(t) = 0 \iff f(t) = \sum_{j=0}^{m-1} A_j t^j,$$

(ii) $$x^m g(x) = 0 \iff g(x) = \sum_{j=0}^{m-1} B_j \delta^{(j)}(x),$$

där $\{A_j\}_{j=0}^{m-1}$ och $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ är konstanter. ∎

Bevis. Använd sats 5.18 och induktion.

Anmärkning. Ekvationen $D^m f(t) = 0$ har således samma lösningar i klassisk mening och i distributionsmening.

Analogt kan man utgående från motsvarande differentialekvation visa

Sats 5.30. *Den allmänna lösningen till ekvationen*

$$p(x)g(x) = 0, \tag{5.72}$$

där p är ett polynom och g en tempererad distribution, är en linjärkombination av termer av typen

$$\delta^{(j)}(x - a),$$

där a är ett reellt nollställe till p, och j är mindre än multipliciteten för nollstället a. Mer utförligt har vi följande.

a) *Om alla rötter a_k till polynomet*

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)^{m_k}$$

är reella, har ekvation (5.72) den allmänna distributionslösningen

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 1} B_{jk} \delta^{(j)}(x - a_k). \tag{5.73}$$

b) *Om polynomet $q(x)$ saknar reella rötter och distributionen $g(x)$ satisfierar ekvationen*

$$q(x)g(x) = 0,$$

så är $g(x) = 0$.

c) *Ett allmänt polynom $r(x)$ kan alltid faktoriseras $r(x) = p(x)q(x)$, med p och q enligt ovan. Den allmänna distributionslösningen till ekvationen*

$$r(x)g(x) = 0$$

ges då av (5.73).

Bevis. Del a) följer av föregående sats. För att visa del b) konstaterar vi att funktionen

$$\mu(x) = \frac{1}{q(x)}$$

är måttligt växande. Vi kan därför multiplicera distributionen qg med μ. Vi får

$$0 = \mu(qg) = (\mu q)g = 1 \cdot g = g.$$

För att visa del c) multiplicerar vi distributionen rg med μ:

$$0 = \mu(rg) = \mu(qpg) = (\mu q)(pg) = 1 \cdot (pg) = pg.$$

Utnyttja nu del a). ∎

Exempel. Ekvationen $(t-1)t^2 f(t) = 0$ för distributionen f har den allmänna lösningen

$$f(t) = a\delta(t-1) + b\delta(t) + c\delta'(t).$$

Med hjälp av ovanstående kan vi lösa följande

Problem. Sök den allmänna lösningen y i $\mathcal{S}'$ till differentialekvationen

$$\sum_{l=0}^{N} a_l y^{(l)}(t) = f(t), \tag{5.74}$$

där $f \in \mathcal{S}'$.

Efter fouriertransformering övergår (5.74) i ekvationen

$$P(i\omega)\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \tag{5.75}$$

där

$$P(\lambda) = \sum_{l=0}^{N} a_l \lambda^l$$

är det karakteristiska polynomet. Den allmänna lösningen till (5.75) kan skrivas

$$\widehat{y}(\omega) = \widehat{y}_H(\omega) + \widehat{y}_p(\omega),$$

där $\widehat{y}_H$ löser den homogena ekvationen

$$P(i\omega)\widehat{y}_H(\omega) = 0,$$

och $\widehat{y}_p$ är en partikulärlösning till (5.75).

Fall 1. Det enklaste fallet föreligger då P saknar rent imaginära rötter. Vi kan då multiplicera (5.75) med $1/P(i\omega)$ som är en måttligt växande funktion, och får

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{P(i\omega)}.$$

Här är $\widehat{y}_H(\omega) = 0$ enligt sats 5.30 b).

Exempel. Sök en lösning $y \in \mathcal{S}'$ till differentialekvationen

$$2y' - y = -2\delta. \tag{5.76}$$

Lösning. Fouriertransformation ger

$$(2i\omega - 1)\widehat{y} = -2.$$

Här är $P(i\omega) = 2i\omega - 1 \neq 0$ för reella ω och $1/P(i\omega) = 1/(2i\omega - 1)$ är en måttligt växande funktion. Således är

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{2}{1 - 2i\omega},$$

som är en väldefinierad distribution med den inversa fouriertransformen

$$y(t) = H(-t)e^{t/2},$$

vilket är den sökta lösningen. ∎

Anmärkning. Ekvation (5.76) har den homogena lösningen $y_h(t) = Ae^{t/2}$. Den kommer ej med i vår lösning, ty y_h är en tempererad distribution endast då $A = 0$.

Fall 2. Betydligt svårare blir det när den karakteristiska ekvationen $P(\lambda) = 0$ har imaginära rötter. Antag att $P(\lambda) = 0$ då $\lambda = i\omega_k$ för $1 \leq k \leq n$, där $n \leq N$, och att $m_1, \ldots, m_n$ är multipliciteterna för de distinkta rötterna $i\omega_1, \ldots, i\omega_n$. Lösningen till den homogena ekvationen

$$P(i\omega)\widehat{y}_H(\omega) = 0$$

är då enligt sats 5.30

$$\widehat{y}_H(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 1} B_{jk}\, \delta^{(j)}(\omega - \omega_k).$$

I detta fall kan man inte *a priori* multiplicera (5.75) med $1/P(i\omega)$ för att få en partikulärlösning, ty $1/P(i\omega)$ är ingen måttligt växande funktion. Produkten

$$\frac{1}{P(i\omega)}\,\widehat{f}(\omega)$$

är nämligen ej säkert definierad. Om $\widehat{f}(\omega)$ är tillräckligt reguljär i nollställena till $P(i\omega)$, är emellertid produkten väldefinierad, och en partikulärlösning erhålles genom inverstransformering. Detta åskådliggöres bäst med några exempel.

Exempel. Sök en partikulärlösning medelst fouriertransformering till differentialekvationen

$$y'' + y = f, \quad \text{där } f(t) = e^{i\alpha t}, \quad \alpha \neq \pm 1.$$

Lösning. På transformsidan får vi

$$P(i\omega)\widehat{y}(\omega) = (1 - \omega^2)\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \alpha).$$

Distributionen $\widehat{f}(\omega)$ är bara singulär då $\omega = \alpha$, vilket är skilt från nollställena till $P(i\omega)$, och därför *borde* det gå att definiera produkten

$$\frac{1}{P(i\omega)}\, 2\pi\delta(\omega - \alpha) = \frac{2\pi}{P(i\alpha)}\,\delta(\omega - \alpha).$$

Vi gör därför *ansatsen*

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{2\pi}{1 - \alpha^2}\,\delta(\omega - \alpha)$$

och *kontrollerar* genast att

$$\begin{aligned}(1 - \omega^2)\widehat{y}(\omega) &= \frac{2\pi}{(1 - \alpha^2)}\left[(1 - \omega^2)\delta(\omega - \alpha)\right] \\ &= \frac{2\pi}{(1 - \alpha^2)}\left[(1 - \alpha^2)\delta(\omega - \alpha)\right] = 2\pi\delta(\omega - \alpha).\end{aligned}$$

Inverstransformering ger slutligen

$$y(t) = \frac{1}{1 - \alpha^2}\, e^{i\alpha t}.$$ ∎

Exempel. Samma uppgift med $f(t) = e^{it}$.

Lösning. Denna gång får vi

$$P(i\omega)\widehat{y}(\omega) = (1-\omega^2)\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega-1),$$

och här är faktiskt produkten $\widehat{f}(\omega)\cdot 1/P(i\omega)$ *helt odefinierad*, eftersom distributionerna $\widehat{f}(\omega)$ och $1/P(i\omega)$ båda två är singulära i punkten $\omega = 1$. Den riktiga ansatsen visar sig vara

$$\widehat{y}(\omega) = B\delta'(\omega-1),$$

för om $\mu(\omega)$ är en snäll funktion gäller *reduktionsreglerna*

$$\begin{aligned} \mu(\omega)\delta(\omega-a) &= \mu(a)\delta(\omega-a), \\ \mu(\omega)\delta'(\omega-a) &= \mu(a)\delta'(\omega-a) - \mu'(a)\delta(\omega-a). \end{aligned} \tag{5.77}$$

I detta fall ger de

$$(1-\omega^2)\widehat{y}(\omega) = (1-\omega^2)B\delta'(\omega-1) = -(-2\omega)B\delta(\omega-1) = 2B\delta(\omega-1),$$

varför vi väljer $B = \pi$ och får

$$\widehat{y}(\omega) = \pi\delta'(\omega-1) = \left(-\frac{i}{2}\right)\left(i\frac{d}{d\omega}\right) 2\pi\delta(\omega-1),$$

varav

$$y(t) = \left(-\frac{i}{2}\right) te^{it}.$$

■

Exempel. Finn en lösning $y \in \mathscr{S}'$ till differentialekvationen

$$(D^2-1)^2 y(t) = \delta''(t) \tag{5.78}$$

och skissa den funna lösningen. Ligger den homogena lösningen i $\mathscr{S}'$? Motivera!

Lösning. Vi inför polynomet $P(\lambda) = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$ och ser att vänster led i (5.78) kan skrivas

$$P(D)y = (D+1)^2(D-1)^2 y = y^{(iv)} - 2y'' + y.$$

Fouriertransformering av (5.78) ger

$$P(i\omega)\widehat{y}(\omega) = (i\omega)^2. \tag{5.79}$$

Polynomet $P(i\omega) = (\omega^2+1)^2$ saknar reella rötter, så vi kan multiplicera (5.79) med den måttligt växande funktionen $1/P(i\omega)$. Vi får

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{(i\omega)^2}{P(i\omega)}. \tag{5.80}$$

Vid inverstransformering ger (5.80) en partikulärlösning till (5.78). Observera att vi inte kunde finna den homogena lösningen

$$y_h(t) = (A+Bt)e^t + (C+Et)e^{-t}$$

medelst fouriertransform. Det beror på att $y_h \in \mathcal{S}'$ om och endast om $A = B = C = E = 0$. Vi skall nu invertera (5.80) m h a formelsamling på tre olika sätt.

a) Fullständig partialbråksuppdelning ger

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{-\omega^2}{(\omega^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1+i\omega)^2} + \frac{1}{(1-i\omega)^2} - \frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{1-i\omega}\right),$$

varav

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(te^{-t}H(t) + (-t)e^{t}H(-t) - e^{-t}H(t) - e^{t}H(t)\right) = \frac{1}{4}(|t|-1)e^{-|t|}.$$

b) Vi utnyttjar räknelagarna för fouriertransformen och skriver

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{-\omega^2}{(\omega^2+1)^2} = \frac{\omega}{2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\omega^2+1}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\left(i\frac{d}{d\omega}\right)\widehat{g}(\omega),$$

där $\widehat{g}(\omega) = 1/(\omega^2+1)$ och $g(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$. Således är

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)(tg(t)) = \left(-\frac{1}{4}\right)D\left(te^{-|t|}\right).$$

Deriveringsregeln

$$De^{-|t|} = (-\operatorname{sgn} t)e^{-|t|} \quad \text{i } \mathcal{S}'$$

ger slutligen

$$y(t) = \left(-\frac{1}{4}\right)(1 - t\operatorname{sgn} t)\,e^{-|t|} = \frac{1}{4}(|t|-1)e^{-|t|}.$$

c) Faltning kan utnyttjas. Vi skriver

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{1-1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2} = \left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{1+\omega^2} = \widehat{g}(\omega)\widehat{g}(\omega) - \widehat{g}(\omega),$$

varav

$$y = g * g - g.$$

Funktionen $g(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$ ligger i $L^1(\mathbb{R})$, så faltningen $h = g * g$ kan beräknas enligt formeln

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(t-u)\,du.$$

För $t \geq 0$ får vi

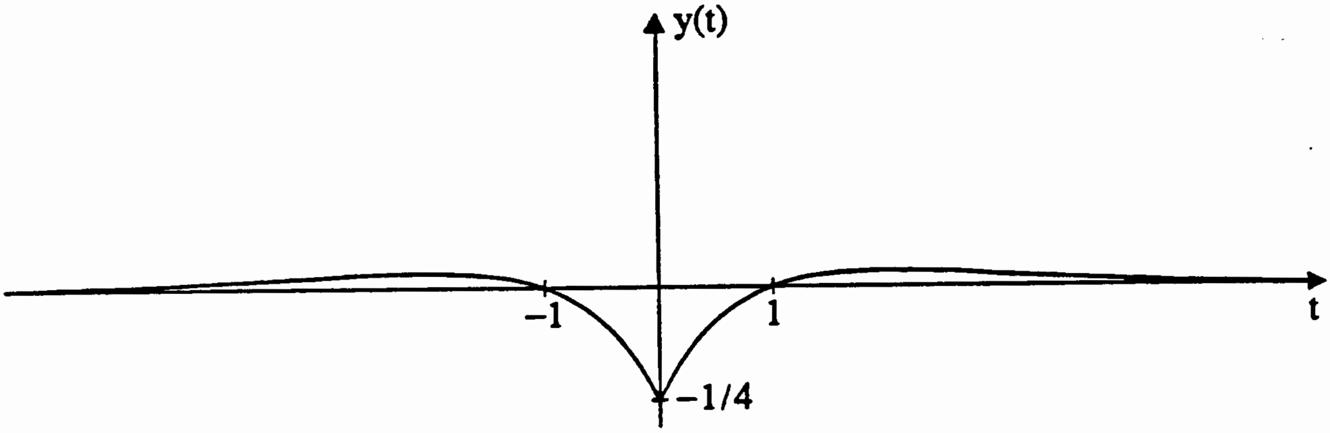
$$\begin{aligned}
h(t) &= \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{t} + \int_{t}^{\infty}\right) g(u)g(t-u)\,du \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{u}e^{-(t-u)}\,du + \int_{0}^{t} e^{-u}e^{-(t-u)}\,du + \int_{t}^{\infty} e^{-u}e^{-(u-t)}\,du\right) \\
&= \ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right) = \frac{1}{4}(t+1)e^{-t}.
\end{aligned}$$

Men g är en jämn funktion. Därför blir h också jämn, varav

$$h(t) = \frac{1}{4}(|t|+1)e^{-|t|}$$

och

$$y(t) = h(t) - g(t) = \frac{1}{4}(|t|-1)e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$


y(t)
−1
1
t
−1/4