Fouriermetoder för F2
5B1202 /del 2 vt 2004
Michael Benedicks

Förslag till lösningar till Inlämningsuppgift 2

1. Finn Fouriertransformen av $\frac{1-\cos t}{t^2}$

Lösning. Utnyttja $\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$. Vi får

$$f(t) = \frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}$$

Vi får $\hat{f}(\omega) = \int \frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} dt = 2\int \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} e^{-i\omega t} dt$

$$= 2\int g(t)\, \overline{h(t)}\, dt$$

där $g(t) = \frac{\sin \frac{t}{2}}{t}$, $h(t) = \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} e^{-i\omega t}$

Plancherels formel ger

$$\hat{f}(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int \hat{g}(x)\, \overline{\hat{h}(x)}\, dx,$$

där

$$\hat{g}(x) = \pi\left[H(x+\tfrac{1}{2}) - H(x-\tfrac{1}{2})\right] \quad \left(\begin{matrix}\text{BETA, s. 315} \\ \text{F15.}\end{matrix}\right)$$

Formeln $\mathcal{F}(e^{i\Omega t} f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega - \Omega)$ $\left(\begin{matrix}\text{BETA, s. 313} \\ \text{F8}\end{matrix}\right)$

ger nu

$$\hat{h}(x) = \pi\left[H(x+\tfrac{1}{2}+\omega) - H(x-\tfrac{1}{2}+\omega)\right]$$

så för $0 < \omega < 1$ gäller

$$\hat{f}(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-\omega} \pi^2 = \pi(1-\omega)$$

och

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{då } \omega \geq 1$$

Vidare är $\hat{f}(\omega)$ jämn

②

Svar. $$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\pi(1-|\omega|) & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|\geq 1\end{cases}$$

Alternativ metod. $h(t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}=2\,\dfrac{\sin\frac{t}{2}}{t}\cdot\dfrac{\sin\frac{t}{2}}{t}$

Faltningsformeln (BETA, s. 313 F14) ger

$$\mathcal{F}\big(f(t)g(t)\big)(\omega)=\frac{1}{2\pi}\,\hat{f}*\hat{g}(\omega)$$

med $f(t)=g(t)=\dfrac{\sin\frac{t}{2}}{t}$ fås

$$\hat{f}(\omega)=\hat{g}(\omega)=\pi\left(H(\omega+\tfrac{1}{2})-H(\omega-\tfrac{1}{2})\right)$$

Vi får således

$$\hat{h}(\omega)=2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-u)\,\hat{f}(u)\,du=$$

$$=\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[H(\omega-u+\tfrac{1}{2})-H(\omega-u-\tfrac{1}{2})\right]du$$

$$=\left[0<\omega<1,\ H(x)=1-H(-x)\right]=\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[H(u-\omega-\tfrac{1}{2})-H(u-(\omega-\tfrac{1}{2}))\right]du$$

$$=\pi\int_{\omega-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}du=\pi(1-\omega)$$

För $\omega>1$ är $\hat{h}(\omega)=0$ och $\hat{h}(\omega)=\hat{h}(-\omega)$, vilket ger samma svar som ovan

Ytterligare en metod är att utnyttja F20 och F8 i BETA, s. 313 och Fouriertransform för distributioner.

2. Antag att $f \in L^1(\mathbb{R})$, f' kontinuerlig och $f' \in L^1$. Sök en funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ så att

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{u-t} g(u)\,du + f'(t), \quad -\infty < t < \infty$$

Denna ekvation kan skrivas

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\,g(u)\,du + f'(t) \qquad (*)$$

där $h(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\hat{h}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x}\,dx = \left[\frac{e^{-x(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+i\omega}$$

Fouriertransform av $(*)$ ger

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}\,\hat{g}(\omega) + i\omega\,\hat{f}(\omega)$$

$$\hat{g}(\omega)\left[1 - \frac{1}{1+i\omega}\right] = i\omega\,\hat{f}(\omega)$$

$$\hat{g}(\omega)\,\frac{i\omega}{1+i\omega} = i\omega\,\hat{f}(\omega)$$

$$\hat{g}(\omega) = (1+i\omega)\,\hat{f}(\omega)$$

Inverstransform ger $g(t) = f(t) + f'(t)$

Svar. $g(t) = f(t) + f'(t)$

3. Bestäm i termer av en integral en lösning till $u_{xx} = u_t$ för $t>0$ så att $u(x,0)=1$ då $|x|<1$ och $u(x,0)=0$ då $|x|>1$

Låt $U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x,t)\,dx$

Fouriertransformation med avseende på x av $u_{xx}=u_t$ ger

$$(i\omega)^2 U(\omega,t) = \frac{\partial}{\partial t} U(\omega,t)$$

eller

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\omega^2 U,$$

Denna differentialekvation ger

$$U(\omega,t) = A(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

Insättning av $t=0$ ger $U(\omega,0) = A(\omega) = \hat{f}(\omega)$

där $f(t) = \begin{cases} 1 & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$

Vi får $U(\omega,t) = \hat{f}(\omega)\, e^{-\omega^2 t}$

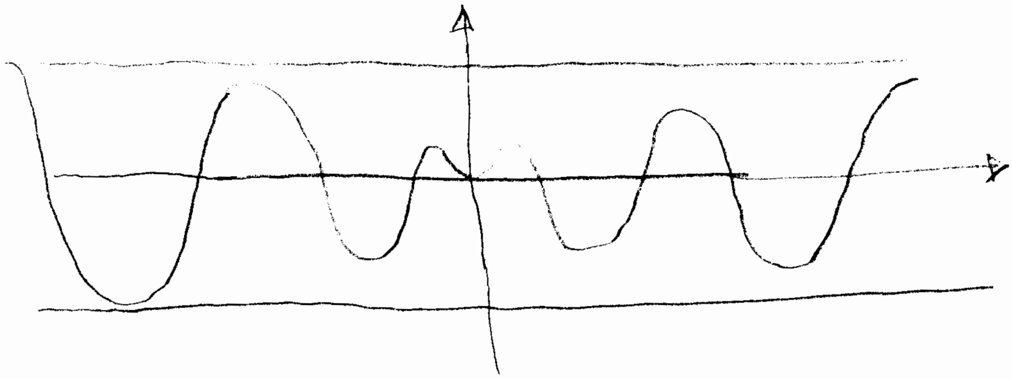
Enligt BETA S. 314 F36 fås med $t=\frac{1}{4a}$, $a=\frac{1}{4t}$

$$e^{-\frac{x^2}{4t}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{4\pi t}\; e^{-\omega^2 t}$$

varför enligt faltningsformeln S. 313 F13 i BETA

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, e^{-\frac{u^2}{4t}}\,du = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}\,du$$

4. Funktionen ser ut något i den här stilen



$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(\cos bt)(\omega) - \mathcal{F}\left[\frac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2}\, e^{-a^2t^2}\right](\omega)$$

BETA, s.315, F46 ger $\mathcal{F}(\cos bt)(\omega) = \pi\left[\delta(\omega+b) + \delta(\omega-b)\right]$

BETA s.314, F36 ger $\mathcal{F}\left(e^{-a^2t^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

Användning av BETA, s.313 F8 ger

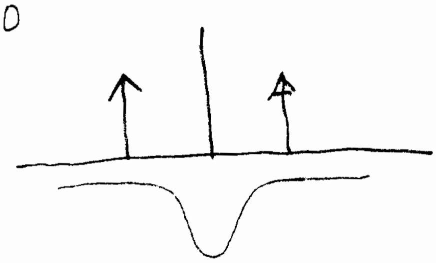
$$e^{i\Omega t} g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{g}(\omega - \Omega)$$

varför

$$\mathcal{F}\left(\cos bt \cdot e^{-a^2t^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[e^{-\frac{(\omega-b)^2}{4a^2}} + e^{-\frac{(\omega+b)^2}{4a^2}}\right]$$

Fouriertransformen har därför utseendet. Genom derivering ser man att funktionen $e^{-\frac{(\omega-b)^2}{4a^2}} + e^{-\frac{(\omega+b)^2}{4a^2}}$ har ett unikt maximum i $x=0$

Grafen ser ut som



Svar. Fouriertransformen är

$$\pi\left[\delta(\omega+b) + \delta(\omega-b)\right] - \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[e^{-\frac{(\omega-b)^2}{4a^2}} + e^{-\frac{(\omega+b)^2}{4a^2}}\right]$$

5

Låt $f(x) = e^{-|x|}$

(a) Sök $f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, f(y)\, dy$

(b) Lös differentialekvationen $y'' - y = e^{-|x|}$ med Fouriermetoder

$f(x) = e^{-|x|} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$. Således är

$$\mathcal{F}(f*f)(\omega) = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}$$

Från BETA, S. 315, F44 fås (med $k=0, b=4, c=0, a=1$)

$$\frac{1}{4} e^{-|t|}(4|t|+4) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4}{(1+\omega^2)^2}$$

Således är $\underline{f*f(t) = (1+|t|)e^{-|t|}}$

(Man kan också räkna ut faltningen direkt.)

(b) Fouriertransformation av differentialekvationen ger

$$(i\omega)^2 \hat{y} - \hat{y} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Således är $\hat{y} = -\dfrac{2}{(1+\omega^2)^2}$

och från (a) ovan fås $y(t) = -\frac{1}{2}(1+|t|)e^{-|t|}$

Den allmänna lösningen blir

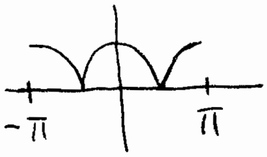
$$\underline{\underline{y(t) = -\frac{1}{2}(1+|t|)e^{-|t|} + Ae^{t} + Be^{-t}}}$$

OBS. De homogena lösningarna $Ae^{t}+Be^{-t}$ försvinner när man tar Fouriertransform. De är ej tempererade distributioner.

6. Finn en serielösning till Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u(x,y) = |x| & x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$u(x,y) = u(\cos\theta, \sin\theta) = |\cos\theta| \quad -\pi < \theta <$



Nu gäller att om $u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta)$ där $f(\theta)$ har Fourierserien

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

att lösningen till Dirichletproblemet ges av

$$u(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta$$

BETA (10), s.310 ger (med $h=1$, $L=\pi$)

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2n\theta$$

Eftersom $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ fås

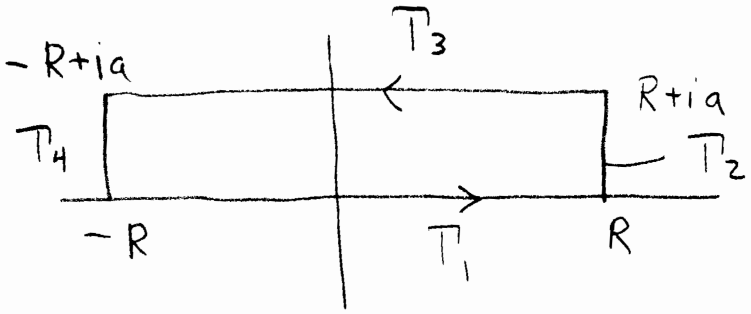
$$|\cos\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2n(\theta + \tfrac{\pi}{2})$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cdot (-1)^n \cos 2n\theta$$

Lösningen till Dirichletproblemet är därför

$$u(re^{i\theta}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cdot (-1)^n r^{2n} \cos 2n\theta$$

7. Betrakta konturen



Enligt Cauchys integralsats gäller med $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$

att
$$\int_\Gamma e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} = 0$$

Vi ser att
$$\left| \int_{\Gamma_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| \leq \max_{0 \leq t \leq a} \left| e^{-\frac{(R+it)^2}{2}} \right| \cdot |\Gamma_2|$$
$$\leq e^{\frac{a^2}{2}} \cdot a \cdot e^{-\frac{R^2}{2}} \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

P.s.s. visas $\left| \int_{\Gamma_3} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| \to 0$ då $R \to \infty$

Vi får således
$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{\Gamma_2} + \int_{R}^{-R} e^{-\frac{(x+ia)^2}{2}} dx + \int_{\Gamma_4} = 0$$

Då $R \to \infty$ erhålles
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{a^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - iax} dx \quad (*)$$

Men $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ ty $\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right)$
$$= \iint_{\substack{x>0 \\ y>0}} e^{-x^2-y^2} dx\,dy = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}$$

$(*)$ ger därför med $a = \omega$ att den sökta Fouriertransformen

är
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x} dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$