Institutionen för matematik
KTH

Tentamen 5B1202, del II

Förslag till lösningar till tentamensskrivning 20004-05-26 i 5B1202/2. Diff. och trans. II, del 2

1) Vi inför polära koordinater r och θ. Problemet är

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \text{för} \quad r < 1 \\ u(x,y) = x - xy \qquad \text{för} \quad r = 1. \end{cases}$$

För $r = 1$ fås

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \cos\theta - \cos\theta\sin\theta \\ &= \cos\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta. \end{aligned}$$

Enligt teorin är $r^n \cos n\theta$ och $r^n \sin n\theta$ harmoniska funktioner för $n = 1, 2, 3, \ldots$ Således löser

$$u(x,y) = r\cos\theta - \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$$

problemet.
Man får $u(x,y) = r\cos\theta - \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta = x - xy$.
(Alternativt kan man direkt inse att $x - xy$ är harmonisk.)
Svar. Lösningen är $u(x,y) = x - xy$.

2) Funktionen

$$P(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$

har Fouriertransform $\hat{P}(\omega) = e^{-|\omega|}$.
Sätt $P_a(t) = \frac{1}{a}P(t/a)$ för $a > 0$. Då gäller

$$P_a(t) = \frac{1}{\pi a}\frac{1}{1+t^2/a^2} = \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}$$

och $\hat{P}_a(\omega) = e^{-a|\omega|}$ (BETA s. 310, F41b). Ekvationen i problemet kan skrivas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{2}{\pi(4+x^2)},$$

vilket innebär

$$f * P = P_2.$$

Fouriertransformering ger

$$\hat{f}(\omega)e^{-|\omega|} = e^{-2|\omega|}.$$

Vi får att $\hat{f}(\omega) = e^{-|\omega|}$ så $f = P$ dvs.

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)},$$

vilket är svaret.

3) Vi använder inre produkten

$$(f,g) = \int_{-2}^{2} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

i rummet $L^2(-2,2)$. Uppgiften är att minimera $||e^{-|x|} - p||$ där p varierar i delrummet S som består av polynom av grad högst 1. Minimum fås då p är den ortogonala projektionen av $e^{-|x|}$ på S. Vi bestämmer först en ON-bas φ_0, φ_1 iS. Den sökta ortogonalprojektionen ges då av

$$(e^{-|x|}, \varphi_0)\varphi_0 + (e^{-|x|}, \varphi_1)\varphi_1.$$

1 och x utgör en bas för S och $(1,x) = \int_{-2}^{2} x\,dx = 0$, dvs. 1 och x är ortogonala. Vi får

$$||1||^2 = (1,1) = \int_{-2}^{2} 1\,dx = 4,$$

vilket medför att $||1|| = 2$. Sätt $\varphi_0 = \frac{1}{||1||} = \frac{1}{2}$ så att $||\varphi_0|| = 1$.

Vi får också $||x||^2 = (x,x) = \int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_0^2 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$, vilket medför att $||x|| = 4/\sqrt{3}$.

Sätt $\varphi_1 = x/||x|| = \frac{\sqrt{3}}{4}x$ så att $||\varphi_1|| = 1$.

φ_0, φ_1 utgör då en ON-bas för S. Vidare är

$$(e^{-|x|}, \varphi_1) = \int_{-2}^{2} e^{-|x|}\frac{\sqrt{3}}{4}x\,dx = 0$$

ty $e^{-|x|}x$ är udda. Den sökta projektionen är

$$\begin{aligned} p(x) = (e^{-|x|}, \varphi_0)\varphi_0(x) &= \left(\int_{-2}^{2} e^{-|x|}\frac{1}{2}\,dx\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}2\int_0^2 e^{-x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(-e^{-2}+1) = \frac{1-e^{-2}}{2}. \end{aligned}$$

4) Antag $a_0 = 0$, $a_1 = 4$ och $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ Låt $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ha Z-transform $A(z)$. Enligt BETA, s. 317 (z4) har $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ Z-transform $z(A(z) - a_0)$ och $\{a_{n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ har Z-transform $z^2A(z) - a_0z^2 - a_1z = z^2A(z) - z^2 - 4z$. Z-transformering av ekvationen ger

$$z^2A(z) - z^2 - 4z = 3z(A(z) - 1) + 4A(z)$$

Detta ger

$$A(z)(z^2 - 3z - 4) = z^2 + 4z - 3z.$$

Efter uppdelning i faktorer fås

$$A(z)(z+1)(z-4) = z^2 + z = z(z+1),$$

och detta ger

$$A(z) = \frac{z}{z-4}.$$

Enligt BETA, s.318 (z10), får vi att

$$a_n = 4^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

5) Låt H beteckna Heavisidefunktionen. Funktionen f är definierad av

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{för} \quad |x| \geq 2, \\ 4 - x^2 & \text{för} \quad |x| < 2 \end{cases}$$

och

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)H(x-2) + (x^2 - 4)(1 - H(x+2)) + (4 - x^2)(H(x+2) - H(x-2)) \\ &= (x^2 - 4)(2H(x-2) - 2H(x+2) + 1). \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 - 4)(2\delta(x-2) - 2\delta(x+2)) \\ &\quad + 2x(2H(x-2) - 2H(x+2) + 1) \\ &= 2x(2H(x-2) - 2H(x+2) + 1) \end{aligned}$$

ty $x^2 - 4 = 0$ för $x = \pm 2$. Vi får sedan

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x(2\delta(x-2) - 2\delta(x+2)) \\ &\quad + 2(2H(x-2) - 2H(x+2) + 1) \\ &= 8\delta(x-2) + 8\delta(x+2) + 2\left(2H(x-2) - 2H(x+2) + 1\right). \end{aligned}$$

Svar. Andraderivatan är $8\delta(x-2) + 8\delta(x+2) + 2\left(2H(x-2) - 2H(x+2) + 1\right)$.

6) Vi skriver

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Om c är ett heltal n fås $f(x) = \cos nx$ och Fourierserien blir $\cos nx$. Antag sedan att c ej är heltal. Vi beräknar Fourierkoefficienterna a_n och b_n och får

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos cx \, \sin nx \, dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ty integranden är udda. Vidare är

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos cx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin cx}{c}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi c}\sin c\pi.$$

Formeln $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$ ger för $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos cx \, \cos nx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(n-c)x + \cos(n+c)x\right) \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-c)x}{n-c} + \frac{\sin(n+c)x}{n+c}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(2\frac{\sin(n-c)\pi}{n-c} + 2\frac{\sin(n+c)\pi}{n+c}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n\pi - c\pi)}{n-c} + \frac{\sin(n\pi + c\pi)}{n+c}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi \, \sin(-c\pi)}{n-c} + \frac{\cos n\pi \, \sin(c\pi)}{n+c}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\sin c\pi\left(\frac{1}{n+c} - \frac{1}{n-c}\right) = \frac{2c}{\pi}(\sin c\pi)\,(-1)^n\frac{1}{c^2-n^2}.
\end{aligned}$$

Fourierserien blir

$$\frac{1}{\pi c}\sin c\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c}{\pi}(\sin c\pi)\,\frac{(-1)^n\cos nx}{c^2-n^2}.$$

Serien är konvergent för alla x ty

$$|a_n \cos nx| \leq A\frac{1}{n^2},$$

för någon konstant A och

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

är konvergent.

7) Låt H beteckna Heavisidefunktionen och sätt

$$x(t) = H(t+1) - H(t-1).$$

Då är $f(t) = tx(t) - (1 - H(t+1)) + H(t-1)$.

$H(t)$ har Fouriertransform $\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$ där $\frac{1}{i\omega}$ skall tolkas som ett principalvärde (BETA, s. 308 (F21)).
Vi får följande tabell över Fouriertransformer

$$\begin{array}{rcl}
H(t-1) & \mapsto & e^{-i\omega}\left(\dfrac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = \dfrac{e^{-i\omega}}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \\
H(t+1) & \mapsto & e^{i\omega}\left(\dfrac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = \dfrac{e^{i\omega}}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \\
1 & \mapsto & 2\pi\delta(\omega) \\
x(t) & \mapsto & 2\dfrac{\sin\omega}{\omega} \qquad \text{(BETA s.310, F48)} \\
-itx(t) & \mapsto & \dfrac{d}{d\omega}2\dfrac{\sin\omega}{\omega} = 2\dfrac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2} \\
tx(t) & \mapsto & 2i\dfrac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}.
\end{array}$$

Således har f Fouriertransform

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= 2i\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2} - 2\pi\delta(\omega) + \frac{e^{i\omega}}{i\omega} + \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-i\omega}}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \\
&= 2i\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2} + \frac{2\cos\omega}{i\omega} = 2i\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega - \omega\cos\omega}{\omega^2} \\
&= -2i\frac{\sin\omega}{\omega^2},
\end{aligned}$$

där $\frac{\sin\omega}{\omega^2}$ skall tolkas i principalvärdesmening.