Institutionen för matematik
KTH

Tentamen 5B1202, del II
Förslag till lösningar till tentamensskrivning 20004-06-04 i 5B1202/2. Diff. och trans. II, del 2

1. Eftersom perioden $T = \pi$ blir grundvinkelfrekvensen $\Omega = 2$. Funktionen $f(t)$ är definierad av

$$\begin{cases} f(t) = \cos t & 0 < t < \pi/2 \\ f(t) = -\cos t & -\pi/2 < t < 0 \end{cases}$$

f har utvecklingen i Fourierserie

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t).$$

Metod 1.
Eftersom f är udda får vi $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ och för $n \geq 1$ gäller

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\Omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\Omega t \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \sin 2nt \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [\sin(2n-1)t + \sin(2n+1)t] \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1} - \frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

Detta ger sinusserien

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \Omega nt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nt.$$

Metod 2. Använd formel (11), s. 305 i BETA. med $h = 1$ och $L = \pi$. Observera dock att i den formeln är $T = 2L = 2\pi$ och för att inse att formeln är tillämplig måste man observera att med vår definition gäller för $\pi/2 \leq t < \pi$ att

$$f(t) = f(t - \pi) = -\cos(t - \pi) = \cos t.$$

Definitionen $f(t) = \cos t$ utvidgas därför till att gälla även för $\pi/2 \leq t < \pi$. Därmed gäller formel (11) och vi får sinusserien

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nt,$$

vilket är svaret.

(Observera att de udda frekvenserna försvinner. Detta är förstås relaterat till att funktionen $f(t)$ egentligen har period π, jfr. uppgiftens formulering.)

Parsevals formel s. 303 i BETA ger.

$$\frac{1}{T} \int_{a}^{a+T} f^2(t)\, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Här är $T = \pi$ och vi väljer $a = -\pi/2$. Vi får då

$$\mathrm{VL} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

och

$$\mathrm{HL} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Vi får således

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{64},$$

vilket är svaret på den andra deluppgiften.

2. Z-transformation av ekvationen ger att

$$A(z)(z^2 + 2z + 1) = -\frac{z}{(z+1)^2}.$$

Vi har därvid utnyttjat (z4), s. 317 i BETA och att begynnelsevärdena alla är 0 vid transformation av vänsterledet. Vid transformationen av högerledet har vi utnyttjat (z12), s.318 i BETA med $a = -1$. Då $A(z)$ löses ut erhålles

$$A(z) = -\frac{z}{(z+1)^4}.$$

Inverstransformation ger enligt (z14), s. 318 i BETA , med $a = -1$ och $m = 3$ att

$$a_n = -\binom{n}{3}(-1)^{(n-3)} H(n-3) = \begin{cases} 0, & \text{då } n = 0, 1, 2 \\ (-1)^n n(n-1)(n-2)/6 & \text{då } n \geq 3. \end{cases}$$

Svar. $a_n = (-1)^n n(n-1)(n-2)/6$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Vi gör variabelseparationsansatsen $u(x,t) = X(x)Y(y)$. Insättning i ekvationen ger

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$

Om $X(x) \neq 0$ och $Y(y) \neq 0$ fås

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

. *Fall 1.* $\lambda = -\kappa^2 < 0$. Vi får då ekvationen

$$X'' - \kappa^2 X = 0,$$

som har den allmänna lösningen

$$X(x) = A\cosh\kappa x + B\sinh\kappa x.$$

Villkoret $u(0,y) = 0$ för alla y ger att $A = 0$ och $u(1,y) = 0$ för alla y ger sedan $B = 0$ så enda möjliga lösning är $X(x) \equiv 0$.

Fall 2. $\lambda = 0$. Ekvationen har då lösningen $X(x) = Ax + B$ och $u(0,y) = u(1,y) = 0$ ger att $A = B = 0$ så $X(x) \equiv 0$.

Fall 2. $\lambda = \kappa^2 > 0$. Ekvationen är då

$$X'' + \kappa^2 X = 0,$$

och den allmänna lösningen är

$$X(x) = A\ \cos\kappa x + B\sin\kappa x.$$

Villkoret $u(0,y) = 0$ för alla y ger nu $A = 0$ och om $B \neq 0$ måste $\sin\kappa = 0$. (Om $B = 0$ fås endast den triviala lösningen $X = 0$.) Vi får $\kappa = n\pi$ där $n = 1, 2, \ldots$.

För $\kappa = \pi n$ fås den allmänna lösningen till Y-ekvationen

$$Y_n(y) = a_n\cosh\pi ny + b_n\sinh\pi ny.$$

Eftersom $u(x,1) = 0$ måste $Y_n(1) = 0$ och vi får sambandet

$$a_n\cosh\pi n + b_n\sinh\pi n = 0. \qquad (*)$$

Linjärkombination av dessa lösningar ger nu

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin\pi nx\cdot\cosh\pi ny + b_n\sin\pi nx\cdot\sinh\pi ny).$$

Insättning av randvillkoret $u(x,0) = \sin\pi x$ ger nu

$$\sin\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\pi nx,$$

och vi får $a_1 = 1$ och $a_n = 0$ då $n = 2, 3, \ldots$. Pga. (*) fås nu också att $b_n = 0$ då $n = 2, 3, \ldots$.

Vidare är $a_1 \cosh \pi + b_1 \sinh \pi = 0$ så $b_1 = -\cosh \pi / \sinh \pi$. Detta ger nu lösningen

$$u(x,y) = \sin \pi x \cdot \cosh \pi y - (\cosh \pi / \sinh \pi) \sin \pi x \cdot \sinh \pi y,$$

vilket är svaret.

4. Plancherels formel ger med $g = f * f'$ att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 \, d\omega$$

Här är $\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(f')(\omega) = \hat{f}(\omega)(i\omega)\hat{f}(\omega)$ och vi får

$$\hat{g}(\omega) = \frac{i\omega}{(1+|\omega|^3)^2}.$$

Vi får därför

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2 \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\omega|^2}{(1+|\omega|^3)^4} \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\omega^2}{(1+\omega^3)^4} \, d\omega \\ &= \frac{1}{3\pi} \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{(1+\omega^3)^3} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{9\pi}.\end{aligned}$$

Svar. Den sökta integralen är $1/(9\pi)$.

5. Minimera i stället

$$\int_{0}^{\infty} |x^2 - (AL_0(x) + BL_1(x))|^2 \, e^{-x} \, dx$$

där $L_0(x) = 1$ och $L_1(x) = 1 - x$ är de två första Laguerrepolynomen (BETA, s. 258-259). Eftersom Laguerrepolynomen är ortonormala med skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_{0}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} e^{-x} \, dx$$

skall man välja

$$\begin{cases} A = \langle x^2, L_0 \rangle \\ B = \langle x^2, L_1 \rangle \end{cases}$$

Nu gäller enligt BETA, s. 259 att

$$x^2 = 2L_0(x) - 4L_1(x) + 2L_2(x),$$

varför vi skall välja $A = 2$ och $B = -4$. Vi får då det sökta förstagradspolynomet

$$a + bx = 2L_0(x) - 4L_1(x) = 2 - 4 \cdot (1 - x) = 4x - 2.$$

Svar. Man skall välja $a = -2$ och $b = 4$.

6. Vi skriver

$$f(t) = \frac{t^3}{1+t^2} = \frac{t^3+t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} = t - \frac{t}{1+t^2}$$

Enligt BETA, s. 308 (F19) gäller att Fouriertransformen av t är $2\pi i\delta'(\omega)$ och enligt BETA, s. 310 (F29b.) med $a = 1$ gäller

$$\frac{t}{1+t^2} \qquad \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \qquad -i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn}\omega$$

Den sökta Fouriertransformen är därför

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i\delta'(\omega) + i\pi e^{-|\omega|} \operatorname{sgn}\omega.$$

7. Funktionen

$$h(x) = \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\pi x}$$

har (BETA, s. 310 (F51)) Fouriertransform

$$\hat{h}(\omega) = H(\omega + \frac{1}{2}) - H(\omega - \frac{1}{2}),$$

dvs.

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{då} \quad |\omega| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{då} \quad |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ortogonaliteten. Enligt BETA, s. 308 (F8) gäller

$$e^{i\Omega t} f(t) \qquad \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \qquad \hat{f}(\omega - \Omega)$$

och vi får därför

$$\varphi_n(x) = e^{inx} h(x) \qquad \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \qquad \hat{\varphi}_n(\omega) = \hat{h}(\omega - n).$$

Funktionerna $\hat{\varphi}_n(\omega)$ uppfyller därför

$$\hat{\varphi}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{då} \quad n - \frac{1}{2} < \omega < n + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Enligt Plancherels formel gäller därför

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\overline{\varphi_n(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_m(\omega)\overline{\hat{\varphi}_n(\omega)}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\delta_{mn},$$

där δ_{mn} är Kroneckers delta

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{då } m = n, \\ 0 & \text{då } m \neq n. \end{cases}$$

Därmed är ortogonaliteten visad.

Beräkning av koefficienterna c_n.
Inför funktionen f genom

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dess Fouriertransform är enligt BETA, s.310

$$\hat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

De minimerande koefficienterna c_n ges enligt L^2-teorin av

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}.$$

Enligt första delen av uppgiften gäller $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 1/(2\pi)$. För att beräkna $\langle f, \varphi_n \rangle$ använder vi på nytt Plancherel och får då $n > 0$

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\varphi_n}(\omega)} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \pi e^{-\omega} \, d\omega = \frac{1}{2} e^{-n} (e^{1/2} - e^{-1/2}).$$

Vi får att $c_n = 2\pi \cdot \frac{1}{2} e^{-n}(e^{1/2} - e^{-1/2}) = \pi e^{-n}(e^{1/2} - e^{-1/2})$. Vidare är enligt Plancherel

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \pi e^{-|\omega|} \, d\omega = \int_{0}^{1/2} e^{-\omega} \, d\omega = 1 - e^{-1/2},$$

så $c_0 = 2\pi(1 - e^{-1/2})$. För $n = -k < 0$ utnyttjar vi att

$$c_{-k} = \langle f, \varphi_{-k} \rangle = \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} = c_k$$

eftersom c_k är reellt.
Svar. $c_0 = 2\pi(1 - e^{-1/2})$ och $c_n = \pi e^{-|n|}(e^{1/2} - e^{-1/2})$ då $n \neq 0$.