Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1202, DEL II
FÖRSLAG TILL LÖSNINGAR TILL TENTAMENSSKRIVNING 20004-08-23 I 5B1202/2. DIFF. OCH TRANS. II, DEL 2

1. Vi utnyttjar först att

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t,$$

och högerledet är Fourierserien för $\cos^2 t$.
Enligt BETA, (3), s. 309 (3) med $\alpha = 1$ och $L = \pi$ gäller att $|t|$ har Fourierserien

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nt.$$

Den sökta Fourierserien blir

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nt$$

Serien är konvergent för alla t ty

$$\left|\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nt\right| \le A\frac{1}{n^2}$$

för någon konstant A och $\sum_{n=3}^{\infty}(1/n^2)$ är konvergent.

2. Låt $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ha Z-transform $A(z)$. Enlig BETA, s. 322, (z4), gäller då följande Z-transformtabell

$$\begin{array}{ccc} \{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} & \overset{Z}{\mapsto} & zA(z) - a_0 z \\ \{a_{n+2}\}_{n=0}^{\infty} & \overset{Z}{\mapsto} & z^2A(z) - a_0 z^2 - a_1 z. \end{array}$$

Z-transformation av ekvationen ger att

$$z^2A(z) - 2z^2 - 7z - 7(zA(z) - 2z) + 10A(z) = 0.$$

Härav fås

$$A(z)(z^2 - 7z + 10) = 2z^2 - 7z,$$

och $A(z)(z-2)(z-5) = z(2z-7)$, vilket ger

$$A(z) = z\frac{2z-7}{(z-2)(z-5)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$A(z) = z\left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-5)}\right) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-5},$$

och härav följer $a_n = 2^n + 5^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Vi använder inreproduken

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}\,dx,$$

på rummet $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$. Vi skall minimera $||x^3 - P||$, där P varierar i delrummet S som består av polynom av grad högst 2. Minimum fås då P är ortogonala projektionen av x^3 på S. Hermitepolynomen $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ och $H_2(x) = 4x^2 - 2$ utgör en ortogonal bas i S, se BETA, s. 263. Ortogonalprojektionen ges då av

$$\frac{\langle x^3, H_0\rangle H_0}{||H_0||^2} + \frac{\langle x^3, H_1\rangle H_1}{||H_1||^2} + \frac{\langle x^3, H_2\rangle H_2}{||H_2||^2}$$

Nu gäller att

$$\langle x^3, H_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx = 0$$

ty integranden är udda och av samma skäl är $\langle x^3, H_2\rangle = 0$.
Det sökta polynomet är därför

$$P = \frac{\langle x^3, H_1\rangle H_1}{||H_1||^2}.$$

Enligt BETA, s. 262, är $||H_1||^2 = 2\sqrt{\pi}$ och

$$\begin{aligned}
\langle x^3, H_1\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot 2xe^{-x^2}\,dx = \{\text{partiell integration}\} \\
&= \left[-e^{-x^2}x^3\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}3x^2\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\frac{3}{2}x\,dx = \{\text{part. int.}\} \\
&= \left[-e^{-x^2}\frac{3}{2}x\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Lösningen blir därför

$$P(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}\,2x}{2\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2}x.$$

Alternativt kan man utnyttja utvecklingen

$$x^3 = \frac{1}{8}(H_3 + 6H_1)$$

(se BETA, s. 263). Detta ger $P(x) = \frac{6}{8}H_1(x) = \frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{3}{2}x$.

4. Sätt

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} \qquad \text{då } t \neq 0$$

och $f(0) = 1$ samt

$$g(t) = e^{-|t|}.$$

Enligt BETA, s. 315 (F51) är

$$\hat{f}(\omega) = \pi\left(H(\omega+1) - H(\omega-1)\right) = \begin{cases} \pi & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

och enl. BETA, s. 314 (F32) är

$$\hat{g}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Vidare gäller enligt BETA s.313 (F14) att

$$f(t)g(t) \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}(\omega).$$

Därför gäller att Fouriertransformen av h är

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - u)\hat{g}(u)\,du \\
&= \int\limits_{\omega-1}^{\omega+1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(\omega+1) - \arctan(\omega-1)
\end{aligned}$$

och detta ger svaret.

5. Vi har

$$f(t) = e^{-t}H(t) + e^{t}(1 - H(t)),$$

där H är Heavisidefunktionen. Härav följer

$$\begin{aligned}
f'(t) &= e^{-t}\delta(t) - e^{-t}H(t) + e^{t}\left(-\delta(t)\right) + e^{t}\left(1 - H(t)\right) \\
&= -e^{-t}H(t) + e^{t}\left(1 - H(t)\right),
\end{aligned}$$

där H är Heavisidefunktionen och

$$\begin{aligned}
f''(t) &= -e^{-t}\delta(t) + e^{-t}H(t) + e^{t}\left(-\delta(t)\right) + e^{t}\left(1 - H(t)\right) \\
&= e^{-|t|} - 2\delta(t).
\end{aligned}$$

Svar. $f'' = e^{-|t|} - 2\delta$.

6. För $\lambda > 0$ sätt $\lambda = \omega^2$ där $\omega > 0$. Ekvationen blir då $f'' + \omega^2 f = 0$ som har lösningar

$$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

och vidare är

$$f'(x) = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x.$$

$f(0) = 0$ ger $A = 0$ och $f'(\pi) = 0$ ger $\cos\omega\pi = 0$ varav följer att $\omega = n+\frac{1}{2}$ där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Vi får egenvektorer $f_n(x) = \sin(n+\frac{1}{2})x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ svarande mot egenvärdena $(n+\frac{1}{2})^2$. För $\lambda \le 0$ finner vi inga lösningar som är kompatibla med randvillkoren.

Alla egenvektorer kan skrivas på formen $c_n f_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, där $c_n \neq 0$ är konstanter. Enligt Sturm Liouvilles sats utgör $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ett fullständigt ortogonalsystem i $L^2(0, \pi)$.

7. Sätt $U(\omega, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} u(x, y)\, dx$. Partiell Fouriertransformation av Laplaces ekvation med avseende på x ger då för $0 \le y \le a$

$$-\omega^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

eller

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \omega^2 U,$$

vilket för fixt ω är en ordinär differentialekvation i y. Vi får den allmänna lösningen

$$U(\omega, y) = A(\omega)e^{-\omega y} + B(\omega)e^{\omega y}.$$

$u(x, 0) = 0$ ger $U(\omega, 0) = 0$ och $A(\omega) + B(\omega) = 0$, vilket ger $B(\omega) = -A(\omega)$. Vidare fås

$$U(\omega, a) = \hat{f}(\omega) = A(\omega)e^{-a\omega} - A(\omega)e^{a\omega}.$$

Vi får också

$$\begin{aligned} U(\omega, y) &= \frac{\hat{f}(\omega)}{e^{-a\omega} - e^{a\omega}} \left(e^{-y\omega} - e^{y\omega}\right) \\ &= \hat{f}(\omega)\frac{\sinh y\omega}{\sinh a\omega}. \end{aligned}$$

Inversionsformeln ger lösningen

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \frac{\sinh y\omega}{\sinh a\omega}\, d\omega.$$

För $0 < y < a$ fås $|\sinh y\omega| \le |\sinh a\omega|$, vilket ger $|U(\omega, y)| \le |\hat{f}(\omega)|$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega, y)|^2\, d\omega \le \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega.$$

Olikheten i formuleringen av uppgiften följer nu av Plancherels sats.

Uttrycket för $u(x, y)$ kan också skrivas som en faltning. Genom att använda faltningsformeln för Fouriertransform och BETA, s.316 (F60) baklänges fås att

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)\varphi(t; y)\, dt$$

där

$$\varphi(t; y) = \frac{1}{2a} \frac{\sin(y\pi/a)}{\cosh(t\pi/a) + \cos(y\pi/a)}.$$

Anm. Det finns också homogena lösningar till ekvationen med randvärde 0 både för $y = 0$ och $y = a$, som tex har formen

$$\sin(y\pi/a)\left(A \cosh(\pi x/a) + B \sinh(\pi x/a)\right).$$

Dessa finner man ej med Fouriermetoder eftersom de ej är distributioner (de växer för snabbt i x).