Fouriermetoder för F2

5B1209 /del2

Förslag till lösningar till Inlämningsuppgift 3

1. Beräkna formellt med hjälp av Plancherels formel integralerna

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax \ \sin bx}{x^2}\,dx$, där a, b reella och $a, b > 0$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, a reellt, $a>0$

Lösn. 1a) Utnyttja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega$$

$$\frac{\sin ax}{x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\left[H(\omega+a) - H(\omega-a)\right] = h_a(\omega)$$

(Beta F51, s. 315)

Antag $a \geq b$. Vi får

$$HL = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_a(\omega)\,h_b(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{\pi^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_b(\omega)\,d\omega = \frac{\pi^2}{2\pi}\cdot 2b =$$

$$= \pi b = \pi \min(a,b)$$

Svar. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax \ \sin bx}{x^2}\,dx = \pi \min(a,b)$

1 c) Resonemanget är strikt ty $\dfrac{\sin ax}{x}$, $\dfrac{\sin bx}{x}$ och $\pi\left[H(\omega+c) - H(\omega-c)\right]$, $c = a$ eller b tillhör L^2

1 b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

Plancherels formel med $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$
ger

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega \quad (*)$$

$$\frac{1}{x^2+a^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

(Beta F41b.)

I $(*)$ är $\displaystyle HL = \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{\pi}{a}\right)e^{-a|\omega|}\left(\frac{\pi}{a}\right)e^{-a|\omega|}\,d\omega$

$$= \frac{\pi}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|\omega|}\,d\omega = \frac{\pi}{a^2}\int_0^\infty e^{-2a\omega}\,d\omega$$

$$= \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{e^{-2a\omega}}{-2a}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2a^3}$$

<u>Svar</u>. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$

2. En funktion f definerar en distribution i klassen $\mathcal{S}'$ om $|f(x)| \le C(1+|x|)^N$ för något C och något N.

P.s.s. definerar $\sum a_n \delta(x-n)$ en distribution i $\mathcal{S}'$ om det finns C och N s.a.

$$|a_n| \le C(1+|n|)^N \qquad (*)$$

a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \delta(x-n)$ uppfyller (*)

b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \delta(x-n)$ uppfyller ej (*)

c) $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2+10) e^{3inx}$ har Fouriertransform

$\sum (n^2+10)\, 2\pi\, \delta(\omega - 3n)$ som ligger i $\mathcal{S}'$

och därför gör även f(x) det.

d) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n e^{int}$ ligger ej i $\mathcal{S}'$ ty

$\hat{f}(\omega) = \sum 2^n \cdot 2\pi\, \delta(\omega - n)$ gör det ej

3. Bilda funktionen

$$g(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1+e^t & 0\le t<1 \\ 1 & 1\le t<2 \\ 0 & t\ge 2 \end{cases}$$

Derivering ger:

Den punktvisa derivatan är

$$g_0'(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ e^t & 0<t<1 \\ 0 & 1<t<2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

$$g' = g_0'(t) + 2\delta(t) - e\,\delta(t-1) - \delta(t-2)$$

$$g'' = h(t) + \delta(t) + 2\delta'(t) - e\,\delta(t-1) - e\,\delta'(t-1) - \delta'(t-2)$$

där $h(t)=\begin{cases} e^t & 0\le t\le 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$

Vi byter variabler och skriver

$$\hat{f}(\omega)= h(\omega)+\delta(\omega)+2\delta'(\omega) - e\,\delta(\omega-1) - e\,\delta'(\omega-1) - \delta'(\omega-2)$$

Inverstransformering ger

$$\mathcal{F}^{-1}(h(\omega))(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{i\omega t}e^{\omega}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(it+1)\omega}}{it+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{it+1}-1}{it+1}$$

(II)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{it+1}-1}{it+1}+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi i}2t-\frac{e}{2\pi}\cdot e^{it} - \frac{e}{2\pi i}e^{it}t-\frac{e^{2it}}{2\pi i}\,t$$

som är en vanlig funktion

Metod 2. De finiera

$$\hat{h}(\omega) = g(\omega)$$

Då gäller $t^2 h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -g''(\omega)$

(BETA F11, s. 308)

Eftersom $\hat{f}(\omega) = -g''(\omega)$

följer av Fourierinversion att

$$f(t) = -t^2 h(t) \qquad (*)$$

Men $h(t)$ är en vanlig funktion ty

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(g(\omega))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^2 e^{i\omega t} g(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{i\omega t}(1+e^{\omega})\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_1^2 e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(it+1)\omega}}{1+it}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{2it}-1}{it} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{it+1}-1}{1+it}$$

så

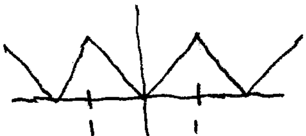
$$f(t) = \frac{it}{2\pi}\left(e^{2it}-1\right) + \frac{t^2}{2\pi(1+it)}\left(1-e^{it+1}\right) \quad (\square\square$$

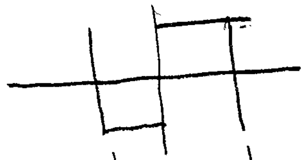
Att f är en vanlig funktion ses lätt ur $(*)$

4. Funktionen $f(t)=|t|$ för $|t|\le \frac{1}{2}$ och med perioden 1 har Fourierserien

$$f(t)=\frac{1}{4}-\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ udda}}}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^\alpha}e^{2\pi i n t} \qquad (*)$$

$\leftarrow$ fel i uppgiften





Vi gör först b)

$$f'=\begin{cases}-1 & -\frac{1}{2}<t<0 \\ 1 & 0<t<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$f''=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k)-2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k-1)$$

Vi får $c_n(f'')=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f''(t)\,e^{-2\pi i n t}\,dt=2-2\cdot(-1)^n \qquad (**)$

Svar.

$$f'=\begin{cases}-1 & -\frac{1}{2}<t<0 \\ 1 & 0<t<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$f''=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k)-2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-2k-1)$$

b) Man ser genom derivering av

$$f''=\sum_{n \text{ udda}}4\,\frac{1}{n^{\alpha-2}}\,e^{2\pi i n t} \qquad (*)$$

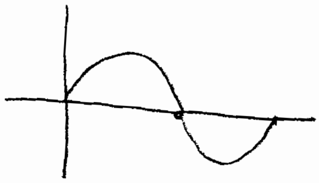
Via jämförelse med $(**)$ fås $\alpha=2$

Svar. $\alpha=2$

5. Låt f vara 2π-periodisk och

$$f(t) = t - \frac{t^2}{\pi} \qquad 0 \le t \le \pi$$

$$f(t+\pi) = -f(t)$$



$f'(u) = -f'(u-\pi)$, $\pi < u < 2\pi$

$$f' = \begin{cases} 1 - \frac{2t}{\pi} & 0 \le t \le \pi \\ -\left(1 - \frac{2(t-\pi)}{\pi}\right) = -3 + \frac{2t}{\pi} & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Distributionsderivatan är den vanliga derivatan ty f är kont.

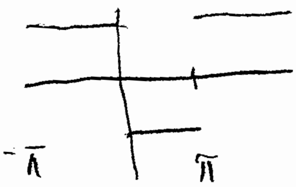
Även f' är kont ty $f'(0) = f'(2\pi) = 1$

och $f'(\pi - 0) = -1 = f'(\pi + 0)$

och vi kan derivera och derivatan i dist. mening är

$$f'' = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} & 0 < t < \pi \\ \frac{2}{\pi} & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Denna funktion är dock diskontinuerlig



och vi får

$$f''' = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{\pi} \delta(x - 2n) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n - 1)$$

$$C_n(f''') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[-\frac{4}{\pi}\delta(x) + \frac{4}{\pi}\delta(x-\pi)\right] e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{4}{\pi}\left(-1 + e^{-in\pi}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ jämn} \\ -\frac{4}{\pi^2} & n \text{ udda} \end{cases}$$

Således är

$$f''' = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(2n+1)x}$$

Genom att integrera tre gånger fås

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i^3(2n+1)^3} e^{i(2n+1)x} + Ax^2 + Bx + C$$

$A = B = 0$ ty f är 2π-periodisk. Vidare är $C = 0$

ty $f(-\varepsilon) = f(2\pi-\varepsilon) = f(\pi-\varepsilon+\pi) = -f(\pi-\varepsilon) =$

$$= -\left[\pi - \varepsilon - \frac{(\pi-\varepsilon)^2}{\pi}\right] = -\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\pi} = -f(\varepsilon)$$

så f är udda.

Vi får $f(x) = -\dfrac{4i}{\pi^2}\sum \dfrac{1}{(2n+1)^3} e^{i(2n+1)x}$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)x$$

(Jfr. BETA (7) s. 309)

<u>Svar</u>. $f(x) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$

6. Låt φ vara en testfunktion i klassen $\mathcal{S}$

Beräkna $\displaystyle\lim_{a\to 0+} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt$

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = [t = au, dt = a\,du] =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(au)}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(au)-\varphi(0)}{\sqrt{1-u^2}}\,du + \varphi(0)\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Nu är $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [u = \sin\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}]$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta} = \pi$$

och $\displaystyle|\varphi(au)-\varphi(0)| \le \max_{-1\le\xi\le\xi} |\varphi'(\xi)| \cdot |a| \le A|a|$

Således är $\displaystyle\left|\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(au)-\varphi(0)}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right| \le$

$$\le A|a| \cdot \int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = A\pi|a| \to 0 \text{ då } a \to 0$$

Vi får

$$\lim_{a\to+0} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = \pi\varphi(0)$$

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\left(H(t+a)-H(t-a)\right)$ konvergerar således

i distributionsmening mot $\pi\delta(x)$