Förslag till lösningar till kontrollskrivning

Diff. o. trans 2 / del 2 5B1202, 2004-05-06

1a) Dirichelproblemet

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{för } x^2+y^2<1 \\ u(e^{i\theta}) = f(\theta), & f(\theta+2\pi)=f(\theta), \end{cases}$$

där f har Fourierserien

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{på komplex form}$$

eller

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

löses av

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

respective

$$u(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta),$$

Se Vretblad s. 149-150 för härledningen av dessa formler med separation av variabler.

I vårt fall får vi (Beta s. 310, (10)) utvecklingen i cosinusserie

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nt$$

Vi får lösningen

$$u(re^{i\theta}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} r^{2n} \cos 2nt$$

1b) Från serieutvecklingen i 1a) fås genom insättning $u(0)=\frac{2}{\pi}$. En alternativ metod är att utnyttja medelvärdessatsen

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta \qquad (*)$$

Eftersom u är kontinuerlig på den slutna enhetsskivan kan man låta $r\nearrow 1$ i $(*)$. Man får

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\,d\theta=\frac{2}{\pi}$$

2. Separation av variabler ger

$$X(x)\,T''(t)=X''(x)\,T(t)$$

Om $X(x)T(t)\neq 0$ fås

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

Fall 1. $\lambda=\omega^2>0$ där $\omega>0$. Ekvationen

$$X''+\omega^2X=0$$

ger

$$X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

Eftersom $u(0,t)=0$ för alla t måste $X(0)=0 \Rightarrow A=0$
Om $B=0$ fås bara den trivala lösningen $X(x)\equiv 0$.
Om $B\neq 0$ måste $\sin\pi\omega=0 \Rightarrow \omega=n$, där n är ett heltal ≥ 1

Ekvationen $\dfrac{T''}{T}=-n^2$

ger $T_n(t)=a_n\cos nt+b_n\sin nt$.

Fall 2. $\lambda=0$ ger $X(x)=Ax+B$ men $X(0)=X(\pi)=0$
$\Rightarrow A=B=0$ och vi får bara lösn. $X(x)\equiv 0$.

Fall 3. $\lambda=-\omega^2<0$. Lösningen är $X(x)=A\cosh\omega x+B\sinh\omega x$ och man ser att $X(0)=X(\pi)=0$ endast då $X(x)\equiv 0$.

Den allmänna lösningen till ekvationen är således

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$$

Vi får $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \sin 2x$

och således är $a_2 = 1$, $a_n = 0$ då $n=1$, $n \geq 2$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestäms av

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n \sin nx = \sin(x) - 2\sin(3x)$$

som ger

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = -\frac{2}{3} \\ b_n = 0, \quad n \geq 4 \end{cases}$$

Svar. $u(x,t) = \sin 2x \cos 2t + \sin x \sin t - \frac{2}{3} \sin 3x \cdot \sin 3t$

Förslag till lösningar till kontrollskrivning Diff. o. trans 2/del 2 5B1202, 2004-05-06

1a) Dirichelproblemet

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{för } x^2+y^2<1 \\ u(e^{i\theta}) = f(\theta), & f(\theta+2\pi) = f(\theta), \end{cases}$$

där f har Fourierserien

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{på komplex form}$$

eller

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

löses av

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

respective

$$u(re^{i\theta}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta).$$

Se Vretblad s. 149-150 för härledningen av dessa formler med separation av variabler.

I vårt fall får vi (Beta s. 310, (10)) utvecklingen i cosinusserie

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nt$$

Vi får lösningen

$$u(re^{i\theta}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} r^{2n} \cos 2nt$$

1b) Från serieutvecklingen i 1a) fås genom insättning $u(0)=\frac{2}{\pi}$. En alternativ metod är att utnyttja medelvärdessatsen

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta \qquad (*)$$

Eftersom u är kontinuerlig på den slutna enhetsskivan kan man låta $r\to 1$ i $(*)$. Man får

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\,d\theta=\frac{2}{\pi}$$

2. Separation av variabler ger

$$X(x)\,T''(t)=X''(x)\,T(t)$$

Om $X(x)T(t)\neq 0$ fås

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

Fall 1. $\lambda=\omega^2>0$ där $\omega>0$. Ekvationen

$$X''+\omega^2 X=0$$

ger

$$X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

Eftersom $u(0,t)=0$ för alla t måste $X(0)=0 \Rightarrow A=0$.
Om $B=0$ fås bara den triviala lösningen $X(x)\equiv 0$.
Om $B\neq 0$ måste $\sin\pi\omega=0 \Rightarrow \omega=n$, där n är ett heltal ≥ 1

Ekvationen $\frac{T''}{T}=-n^2$

ger $T_n(t)=a_n\cos nt+b_n\sin nt$.

Fall 2. $\lambda=0$ ger $X(x)=Ax+B$ men $X(0)=X(\pi)=0$
$\Rightarrow A=B=0$ och vi får bara lösn. $X(x)\equiv 0$.

Fall 3. $\lambda=-\omega^2<0$. Lösningen är $X(x)=A\cosh\omega x+B\sinh\omega x$ och man ser att $X(0)=X(\pi)=0$ endast då $X(x)\equiv 0$.

Den allmänna lösningen till ekvationen är således

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$$

Vi får $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = \sin 2x$

och således är $a_2 = 1$, $a_n = 0$ då $n = 1$, $n \geq 2$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestäms av

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n \sin nx = \sin(x) - 2\sin(3x)$$

som ger

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = -\frac{2}{3} \\ b_n = 0, \quad n \geq 4 \end{cases}$$

Svar. $u(x,t) = \sin 2x \cos 2t + \sin x \sin t - \frac{2}{3} \sin 3x \cdot \sin 3t$