Institutionen för matematik
KTH

TENTAMEN 5B1202, DEL II
DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER FÖR F2, T2 , (E)
3 POÄNG
Fredagen den 4 juni, 2004, kl. 8.00-13.00

Hjälpmedel: Formelsamlingen BETA
Instruktioner: Tentamen består av 7 uppgifter, som ger totalt högst 36 poäng. Ange hur många poäng du fått tillgodoräknat under kursen (högst 4 poäng). För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5, 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl.

1. Definiera $f(x) = \cos x$ på $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ och utveckla $f(x)$ i en sinusserie, dvs. utvidga f så att f blir en udda funktion på reella linjen med period π och utveckla i trigonometrisk Fourierserie.
Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

(5 p)

2. Finn a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, om $a_0 = a_1 = 0$ och

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = (-1)^n n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(5 p)

3. Lös Laplaces differentialekvation $\Delta u = 0$ på kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, med randvillkor

$$\begin{cases} u(0,y) = u(1,y) = 0, & 0 \le y \le 1, \\ u(x,1) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(x,0) = \sin \pi x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

(5 p)

Var god vänd!

4. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen

$$\frac{1}{1+|\omega|^3}.$$

Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2 \, dx.$$

(5 p)

5. Bestäm konstanterna a och b så att integralen

$$\int_{0}^{\infty} |x^2 - (a+bx)|^2 \, e^{-x} \, dx$$

är så liten som möjligt.

(5 p)

6. Fouriertransformera funktionen

$$f(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$$

i distributionsmening.

(5 p)

7. Visa att funktionerna

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\pi x} \, e^{inx}, \qquad n = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

är parvis ortogonala på $L^2(\mathbb{R})$.
Bestäm talen $\{c_n\}_{n=-N}^{N}$ så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

minimeras.

(6 p)