Inlämninguppgift 1

Uppgift 1 *Utveckla* $e^{\frac{x}{3}}$ *i en Laguerreserie, dvs. bestam̈ koefficienterna i formeln*

$$e^{\frac{x}{3}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x).$$

Ledning: *Formeln* $\int_0^\infty e^{-at} t^n dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$ *kan vara användbar.*

Lösning. För det första låt oss visa att $D^k(x^n e^{-x})|_{x=0} = 0$ om $k < n$. Vi har

$$D^k(x^n e^{-x})|_{x=0} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i x^n|_{x=0} D^{k-i} e^{-x}|_{x=0},$$

vilket är lika med 0 eftersom $i < n$.

Vi vet att $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} D^n(x^n e^{-x})$. Alltså

$$c_n = \int_0^\infty e^{\frac{x}{3}} L_n(x) e^{-x} dx =$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{x}{3}} \frac{e^x}{n!} D^n(x^n e^{-x}) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{\frac{x}{3}} D^n(x^n e^{-x}) dx =$$

$$\frac{1}{n!} e^{\frac{x}{3}} D^{n-1}(x^n e^{-x}) \Big|_0^\infty - \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}} D^{n-1}(x^n e^{-x}) dx =$$

$$-\frac{1}{3n!} \int_0^\infty e^{\frac{x}{3}} D^{n-1}(x^n e^{-x}) dx = \ldots = \frac{(-1)^n}{3^n n!} \int_0^\infty e^{\frac{x}{3}} D^0(x^n e^{-x}) dx =$$

$$\frac{(-1)^n}{3^n n!} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{3}x} x^n dx = \frac{(-1)^n}{3^n n!} \frac{n!}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{3(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

□

Svar:

$$e^{\frac{x}{3}} \sim \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n L_n(x)$$

Uppgift 2 *Lös Dirichletproblemet* $u_{xx}+u_{yy}=0$ *då* $0<x,y<1$, $u(x,0)=u(x,1)=0$, $u(0,y)=0$, $u(1,y)=\sin^3\pi y$.

Lösning. Låt oss söka en lösning på formen $u=X(x)Y(y)$. Vi har $X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$. Alltså

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda=const.$$

Ekvationen $-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda$ ger $Y''+\lambda Y=0$. Vi vet från uppgiftens formulering att $Y(0)=Y(1)=0$. Det finns tre möjligheter:

1. $\lambda>0$. Då $Y=a\sin\sqrt{\lambda}y+b\cos\sqrt{\lambda}y$. Insättningen $y=0$ ger $b=0$. Följaktligen $Y=a\sin\sqrt{\lambda}y$. Om $y=1$ har vi $0=\sin\sqrt{\lambda}y$ eller $\sqrt{\lambda}=\pi n$, där n är ett heltal. Så $Y=a\sin\pi ny$. En summa $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\pi ny$ är också en lösning till vår ekvation.

2. $\lambda=0$. Då $Y=ay+b$. Insättningarna $y=0$ och $y=1$ ger $b=0$ och $a+b=0$. Alltså $Y=0$. Vi har fått att det finns bara triviala lösningar i detta fall.

3. $\lambda<0$. Då $Y=ae^{\sqrt{-\lambda}y}+be^{\sqrt{-\lambda}y}$. Det är lätt att se att det inte finns icke-triviala lösningar igen.

Ekvationen $\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda$ ger oss $X''+\lambda X=0$, där $\lambda=(\pi n)^2$. Vi får $X=ce^{\pi nx}+de^{-\pi nx}$. Från villkoret $X(0)=0$ följer det att $c+d=0$ eller $X=c(e^{\pi nx}-e^{-\pi nx})$. Vi vet att $X(1)\neq 0$ (annars skulle $u(1,y)$ vara lika med 0). Antag att till exempel $X(1)=1$. Det innebär att $c=1/(e^{\pi n}-e^{-\pi n})$.

Från uppgiftens formulering vet vi att $Y(y)=\sin^3\pi y$. Nu behöver vi bara utveckla $Y(y)$ i en serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\pi ny.$$

Den bra kända formeln $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ ger oss $\sin^3\pi y=\frac{3}{4}\sin\pi y-\frac{1}{4}\sin 3\pi y$. $\square$

Svar:

$$u(x,y) = \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \frac{3}{4} \sin \pi y - \frac{e^{3\pi x} - e^{-3\pi x}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \frac{1}{4} \sin 3\pi y$$

Uppgift 3 *Lös Dirichletproblemet* $u_{xx} + u_{yy} = 0$ *på enhetsskivan så att* $u(x,y) = x^3 + y^3$ *då* $x^2 + y^2 = 1$.

Lösning. Låt oss söka en lösning på formen

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos \theta n + b_n \sin \theta n),$$

där r, θ är polara koordinater. Vi måste utveckla $x^3 + y^3 = cos^3\theta + \sin^3 \theta$ i en Fourierserie. Enkelt har vi $cos^3\theta + \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$. Det betyder att

$$u = \frac{3}{4} r (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{4} r^3 (\cos 3\theta - \sin 3\theta) =$$

$$\frac{3}{4} r (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{4} r^3 (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - 3 \sin \theta + 4 \sin^3 \theta) =$$

$$\frac{3}{4}(x+y) + x^3 + y^3 - \frac{3}{4}(x^2+y^2)(x+y).$$

□

Svar:

$$u(x,y) = \frac{3}{4}(x+y) + x^3 + y^3 - \frac{3}{4}(x^2+y^2)(x+y)$$

Uppgift 4 *Finn en lösning på följande problem*

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = \sin 2x, & 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Lösning. Som vanligt söker vi en lösning på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx.$$

Villkoret $u(x,0) = x(\pi - x)$ ger oss $x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$. Alltså

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(-x(\pi - x)\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(\pi - 2x)\frac{\cos nx}{n}dx\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left((\pi - 2x)\left.\frac{\sin nx}{n^2}\right|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n^2}dx\right) =$$

$$-\left.\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\right|_0^{\pi} = -4\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^3}.$$

På andra sidan $u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \sin nx$. Eftersom $u_t(x,0)$ måste vara lika med $\sin 2x$ får vi $b_2 = \frac{1}{2}$ och alla andra b_n är lika med 0. □

Svar:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin 2t \sin 2x + \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos(2k+1)t\sin(2k+1)x.$$

Uppgift 5 *Bestäm egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet* $y'' + \lambda y(t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *med randvillkoret* $y(0) = 0$ *och* $y(1) - 2y'(1) = 0$.

Lösning. Det finns tre möjligheter för λ:

1. $\lambda > 0$. Då $y = a\cos\sqrt{\lambda}t + b\sin\sqrt{\lambda}t$. Från villkoren $y(0) = 0$ och $y(1) - 2y'(1) = 0$ följer det att $a = 0$ och $\sin\sqrt{\lambda} - 2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Vi får att $\lambda > 0$ är en lösning till ekvationen $\tan\sqrt{\lambda} = 2\sqrt{\lambda}$. En motsvarande egenfunktion är $\sin\sqrt{\lambda}t$.

2. $\lambda = 0$. Då $y = at + b$. Villkoren $y(0) = 0$ och $y(1) - 2y'(1) = 0$ ger $b = 0$ och $a = 0$. Det finns bara den trivialla lösningen $y = 0$.

3. $\lambda < 0$. Då $y = ae^{\sqrt{-\lambda}t} + be^{\sqrt{-\lambda}t}$. Igen är det lätt att se att $a = b = 0$.

□

Svar: Låt $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots$ vara en sekvens av alla positiva rötterna till ekvationen $\tan\omega = 2\omega$. Då $\lambda_k = \omega_k^2$ är egenvärden och $y_k = \sin\omega_k t$ är egenfunktioner.

Uppgift 6 *Antag att f har Fouriertransformen $\hat{f}$. Finn transformerna av $f(t)\cos at$ och $f(t)\cos^2 at$ (a är reelt och $\neq 0$).*

Lösning. Låt $g(t) = f(t)\cos at = f(t)\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$ och $h(t) = f(t)\cos^2 at = f(t)\frac{1+e^{2iat}+e^{-2iat}}{4}$. Vi har

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}dt = \frac{\hat{f}(\omega-a)+\hat{f}(\omega+a)}{2},$$

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\frac{1+e^{2iat}+e^{-2iat}}{2}dt = \frac{\hat{f}+\hat{f}(\omega-2a)+\hat{f}(\omega+2a)}{2}$$

□

Svar:

$$f(\widehat{t)\cos} at = \frac{\hat{f}(\omega-a)+\hat{f}(\omega+a)}{2},$$

$$f(\widehat{t)\cos^2} at = \frac{\hat{f}+\hat{f}(\omega-2a)+\hat{f}(\omega+2a)}{4}$$